







INTEGRATION

DES

UNBESTIMMTEN INTEGRALS

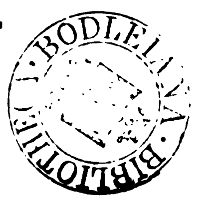
$$\int \frac{x^m \, dx}{(1 + a_0^{q_0} x_0^{q_0})(1 + a_1^{q_1} x^{q_1})(1 + a_2^{q_2}) \cdot \cdot \cdot \cdot (1 + a_{n-1}^{q_{n-1}} x_{n-1}^{q_{n-1}})}$$

Eingereicht

um unter die Docenten der Zürcherischen Hochschule aufgenommen zu werden.

Von

Dr. Fr. Carl Stadlin.





Druck von Orell, Füssli & Comp.

1848.

Es werde folgendes unbestimmte Integrale

$$\int \frac{X^m \, dx}{(1 + a_0^{q_0} x^{q_0})(1 + a_1^{q_1} x^{q_1}) \ldots (1 + a_2^{q_2} x^{q_2}) \ldots \ldots (1 + a_{n-1}^{q_{n-1}} x^{q_{n-1}})},$$

zur Bestimmung vorgelegt, wo $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ beliebige von x independente Grössen und:

$$m < q_0 + q_1 + q_2 + \ldots + q_{n-1}$$

ist.

Man nehme an es sei q_k von der Form $2p_k$. Bei dieser Annahme hat das Binom $1 + a_k^{2p_k} x^{2p_k}$ keinen reellen Faktoren des ersten Grades, wohl aber bilden nachstehende Trimonien die reellen Faktoren des zweiten Grades desselben:

$$1 + 2 a_k x \cos \frac{\pi}{2p_k} + a^2_k x^2.$$

$$1 + 2 a_k x \cos \frac{3\pi}{2p_k} + a^2_k x^2$$

$$1 + 2 a_k x \cos \frac{5\pi}{2p_k} + a^2_k x^2$$

$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$1 + 2 a_k x \cos \frac{(2p_k - 1)\pi}{2p_k} + a^2_k x^2$$

demnach ist man im Stande die ächt gebrochene rationale Funktion

$$\frac{X^m}{(1 + a_0^{2p_0} x^{2p_0})(1 + a_1^{2p_1} x^{2p_1})(1 + a_2^{2p_2} x^{2p_2}) \ldots \ldots (1 + a_{n-1}^{2p_{n-1}} x^{2p_{n-1}})}$$

in Partialbrüche von der allgemeinen Form

$$\frac{A + Bx}{1 + 2\alpha x + \beta x^2}$$

zu zerlegen, um die Integration der vorgelegten Differenzialfunktion von der Integration der Ausdrücke:

$$\frac{A}{1 + 2\alpha x + \beta x^2}, \quad \frac{Bx}{1 + 2\alpha x + \beta x^2}$$

abhängig zu machen.

Setzt man der Kürze wegen λ_k für $\frac{\pi}{2p_k}$ und bezeichnen $A^{(k)}_{2s_k-1}$, $B^{(k)}_{2s_k-1}$ von x independente, einstweilen unbestimmte Grössen, wo k alle ganzen Zahlen

$$0, 1, 2, 3, \ldots n-1$$

und s die Zahlen

$$1, 2, 3, \ldots p$$

der Reihe nach bedeuten, so findet man:

$$1) \quad \frac{x^m}{(1 + a_0^{2p_0} x^{2p_0})(1 + a_1^{2p_1} x^{2p_1})(1 + a_2^{2p_2} x^{2p_2}) \ldots (1 + a_{n-1}^{2p_{n-1}} x^{2p_{n-1}})}$$

$$= \frac{A_1^{(0)} + B_1^{(0)} x}{1 + 2a_0 x \cos\lambda_0 + a_0^2 x^2} + \frac{A_3^{(0)} + B_3^{(0)} x}{1 + 2a_0 x \cos 3\lambda_0 + a_0^2 x^2} + \ldots + \frac{A^{(0)}_{2p_0-1} + B^{(0)}_{2p_0-1} x}{1 + 2a_0 x \cos(2p_0-1)\lambda_0 + a_0^2 x^2}$$

$$+ \frac{A_1^{(1)} + B_1^{(1)} x}{1 + 2a_1 x \cos\lambda_1 + a_1^2 x^2} + \frac{A_3^{(1)} + B_3^{(1)} x}{1 + 2a_1 x \cos 3\lambda_1 + a_1^2 x^2} + \ldots + \frac{A^{(1)}_{2p_1-1} + B^{(1)}_{2p_1-1} x}{1 + 2a_1 x \cos(2p-1)\lambda_1 + a_1^2 x^2}$$

$$+ \frac{A_1^{(2)} + B_1^{(2)} x}{1 + 2a_2 x \cos\lambda_2 + a_2^2 x^2} + \frac{A_3^{(2)} + B_3^{(2)} x}{1 + 2a_2 x \cos 3\lambda_2 + a_2^2 x^2} + \ldots + \frac{A^{(2)}_{2p_2-1} + B^{(2)}_{2p_2-1} x}{1 + 2a_2 x \cos(2p_2-1)\lambda_1 + a_1^2 x^2}$$

$$+ \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots +$$

$$+ \frac{A_1^{(n-1)} + B_1^{(n-1)} x}{1 + 2a_{n-1} x \cos\lambda_{n-1} + a^2_{n-1} x^2} + \frac{A_3^{(n-1)} + B_3^{(n-1)} x}{1 + 2a_{n-1} x \cos 3\lambda_{n-1} + a^2_{n-1} x^2} + \ldots + \frac{A^{(n-1)}_{2p_{n-1}-1} + B^{(n-1)}_{2p_{n-1}-1} x}{1 + 2a_{n-1} x \cos(2p_{n-1}-1)\lambda_{n-1} + a^2_{n-1} x^2}$$

Setzt man ferner der Einfachheit wegen:

$$\varphi(x) = \left(1 + a_0^{2p_0} x^{2p_0}\right) \left(1 + a_1^{2p_1} x^{2p_1}\right) \left(1 + a_1^{2p_2} x^{2p_2}\right) \; . \; . \; . \; . \; \left(1 + a_{n-1}^{2p_{n-1}} x^{2p_{n-1}}\right)$$

so kann voriger Gleichung auch folgende Gestalt gegeben werden:

$$X^m =$$

$$= U_1^{(0)} \varphi(x) + U_3^{(0)} \varphi(x) + U_5^{(0)} \varphi(x) + \; . \; . \; . \; + U_{2p_0-1}^{(0)} \varphi(x)$$

$$+ U_1^{(1)} \varphi(x) + U_3^{(1)} \varphi(x) + U_5^{(1)} \varphi(x) + \; . \; . \; . \; + U_{2p_1-1}^{(1)} \varphi(x)$$

$$+ U_1^{(2)} \varphi(x) + U_3^{(2)} \varphi(x) + U_5^{(2)} \varphi(x) + \; . \; . \; . \; + U_{2p_2-1}^{(2)} \varphi(x)$$

$$+ \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$+ 1U_1^{(n-1)} \varphi(x) + U_3^{(n-1)} \varphi(x) + U_5^{(n-1)} \varphi(x) + \; . \; . \; . \; + U_{2p_{n-1}-1}^{(n-1)} \varphi(x)$$

wo allgemein $U_{2s_k-1}^{(k)}$ statt

$$\frac{A_{2s_k-1}^{(k)} + B_{2s_k-1}^{(k)} x}{1 + 2a_k x \cos(2s_k - 1)\lambda_k + a^2_k x^2}$$

gesetzt worden.

Wenn in dieser in Bezug auf x indentischen Gleichung die Funktion $\varphi(x)$ für irgend einen Werth von x gleich Null wird, so verschwinden sämmtliche Ausdrücke rechts vom (=), mit Ausnahme eines einzigen, der in $\frac{0}{0}$ übergeht; denn irgend eine Wurzel eines Binoms der Funktion $\varphi(x)$ z. B.

$$1 + a_k^{2p_k} x^{2p_k} = 0 \qquad (\alpha)$$

ist zur gleichen Zeit Wurzel irgend einer der trinomischen Faktoren desselben Binom's, z. B. von

$$1 + 1\, a_k\, \alpha \cos(2s_k - 1)\lambda_k + a^2_k x^2 = 0 \qquad (\beta)$$

Wird durch $Q_{2s_k-1}^{(k)}$ das in $\frac{0}{0}$ übergehende Glied bezeichnet, so ist:

$$Q_{2s_k-1}^{(k)} = \frac{\varphi(x)}{1 + 2\, a_k\, x \cos(2s_k - 1)\lambda_k + a^2_k x^2} \cdot \left(A_{2s_k-1}^{(k)} + B_{2s_k-1}^{(k)} x\right)$$

und wenn daher w eine den Gleichungen (α) und (β) gemeinschaftlich zukommende Wurzel vorstellt, und

$$\psi_k(x) = \frac{(1 + a_0^{2p_0} x^{2p_0})(1 + a_1^{2p_1} x^{2p_1})(1 + a_2^{2p_2} x^{2p_2}) \cdot \cdot \cdot (1 + a_{n-1}^{2p_{n-1}} x^{2p_{n-1}})}{1 + 2 a_k x \cos(2s_k - 1)\gamma_k + a^2_k x^2}$$

gesetzt wird, so hat man:

$$\psi_k(w) = \frac{2 a_k^{2p_k} p_k}{2} \cdot \frac{R_k w^{2p_k - 1}}{a_k \cos(2s_k - 1)\gamma_k + a^2_k w}$$

und da beim Statthaben von w als Wurzel der Gleichung (β) auch $\frac{1}{a^2_k w}$ eine Wurzel derselben Gleichung (β) ist, so hat man ferner:

$$\psi_k\left(\frac{1}{a^2_k w}\right) = \frac{2 a_k^{2p_k} p_k}{2} \cdot \frac{S_k \left(\frac{1}{a^2_k w}\right)^{2p_k - 1}}{a_k \cos(2s_k - 1)\gamma_k + \frac{1}{w}}$$

wo

$$R_k = (1 + a_0^{2p_0} w^{2p_0})(1 + a_1^{2p_1} w^{2p_1})(1 + a_2^{2p_2} w^{2p_2}) \cdot \cdot \cdot (1 + a_{n-1}^{2p_{n-1}} w^{2p_{n-1}})$$

$$S_k = (1 + a_0^{2p_0} (a^2_k w)^{-2p_0})(1 + a_1^{2p_1} (a^2_k w)^{-2p_1}) \cdot \cdot \cdot (1 + a_{n-1}^{2p_{n-1}} (a^2_k w)^{-2p_{n-1}})$$

gesetzt werden, jedoch mit der Bemerkung, dass in jeder Binomenfolge rechts vom $=$ immer das Binom

$$1 + a_k^{2p_k} w^{2p_k}$$

$$\text{und } 1 + a_k^{2p_k} (a^2_k w)^{-2p_k}$$

als fehlend betrachtet werden muss.

Man hat demnach zur Bestimmung der Grössen $A^{(k)}_{2s_k - 1}$, $B^{(k)}_{2s_k - 1}$ die zwei Gleichungen:

$$w^m = (A^{(k)}_{2s_k - 1} + B^{(k)}_{2s_k - 1} w) \cdot \frac{2 a_k^{2p_k} p_k}{2 a_k} \cdot \frac{R_k w^{2p_k - 1}}{\cos(2s_k - 1)\gamma_k + a_k w}$$

$$\left(\frac{1}{a^2_k w}\right)^m = \left(A^{(k)}_{2s_k - 1} + B^{(k)}_{2s_k - 1} \frac{1}{a^2_k w}\right) \cdot \frac{2 a_k^{2p_k} p_k}{2 a_k} \cdot \frac{S_k \left(\frac{1}{a^2_k w}\right)^{2p_k - 1}}{\cos(2s_k - 1)\gamma_k + \frac{1}{a_k w}}$$

Nun ergiebt sich für w aus der Gleichung (β):

$$w = - a_k^{-1} \left\{ \cos (2 s_k - 1) \lambda_k - \sqrt{-1} \sin (2 s_k - 1) \lambda \right\}$$
$$\frac{1}{a^2 w} = - a_k^{-1} \left\{ \cos (2 s_k - 1) \lambda_k + \sqrt{-1} \sin (2 s_k - 1) \lambda_k \right\} \qquad (\gamma)$$

und aus der Gleichung (α):

$$a^{2p_k} w^{2p_k} = -1, \quad \frac{1}{a_k^{2p_k} w^{2p_k}} = -1$$

demnach

$$w^m = - \frac{2 p_k}{2 a_k} \left(A^{(k)}_{2s_k - 1} + B^{(k)}_{2s_k - 1} w \right) \frac{R_k w^{-1}}{\cos (2 s_k - 1) \lambda_k + a_k w}$$

$$\left(\frac{1}{a^2 w} \right)^m = - \frac{2 p_k}{2 a_k} \left(A^{(k)}_{2s_k - 1} + B^{(k)}_{2s_k - 1} \frac{1}{a w} \right) \frac{a^2_k S_k w}{\cos (2 s_k - 1) \lambda_k + \frac{1}{a_k w}}$$

also

$$A^{(k)}_{2s_k - 1} + B^{(k)}_{2s_k - 1} w = - \frac{2 a_k}{2 p_k} \frac{w^{m+1} [\cos (2 s_k - 1) \lambda_k + a_k w]}{R_k}$$

$$A^{(k)}_{2s_k - 1} + B^{(k)}_{2s_k - 1} \frac{1}{a^2 w} = - \frac{2 a^3_k}{2 p_k} \frac{(a^2 w)^{-(m+1)} \left[\cos (2 s_k - 1) \lambda_k + \frac{1}{a_k w}\right]}{a^2_k S_k}$$

$$A^{(k)}_{2s_k - 1} \left(w - \frac{1}{a^2 w} \right) = \frac{2 a_k}{2 p_k a^2_k} \left\{ \frac{w^m [\cos (2 s_k - 1) \lambda_k + a_k w]}{R_k} - \frac{(a^2 w)^{-m} \left[\cos (2 s_k - 1) \lambda_k + \frac{1}{a_k w}\right]}{S_k} \right\}$$

$$B^{(k)}_{2s_k - 1} \left(w - \frac{1}{a^2 w} \right) = \frac{2 a^3_k}{2 p_k} \left\{ \frac{(a^2 w)^{-(m+1)} \left[\cos (2 s_k - 1) \lambda_k + \frac{1}{a_k w}\right]}{a^2_k S_k} - \frac{w^{m+1} [\cos (2 s_k - 1) \lambda_k + a_k w]}{a^2_k R_k} \right\}$$

und nun findet man mit Berücksichtigung der Gleichungen (γ) nach einigen Reduktionen

$$A^{(k)}_{2s_k - 1} = \frac{(-1)^m}{2 a_k^m p_k} \left\{ (R_k + S_k) \cos m (2 s_k - 1) \lambda_k + (R_k - S_k) \sqrt{-1} \sin m (2 s_k - 1) \lambda_k \right\} \frac{1}{R_k S_k} \qquad \text{II.}$$

$$B^{(k)}_{2s_k - 1} = a_k \frac{(-1)^m}{2 a_k^m p_k} \left\{ (R_k + S_k) \cos (m+1) (2 s_k - 1) \lambda_k + (R_k - S_k) \sqrt{-1} \sin (m+2) (2 s_k - 1) \lambda_k \right\} \frac{1}{R_k S_k}$$

Nach den gewonnenen Gleichungen II., sind nun sämmtliche unbestimmte von x independente Grössen in Gleichungen I bestimmt, und es geht somit die Gleichung I, in nachstehende Gleichung über:

$$
\begin{aligned}
&\frac{x^m}{\left(1+(a_0x)^{2p_0}\right)\left(1+(a_1x)^{2p_1}\right)\left(1+(a_2x)^{2p_2}\right)\cdots\cdots\left(1+(a_{n-1}x)^{2p_{n-1}}\right)} = \\
&\frac{(-1)^m}{2a_0^m p_0}\sum_{s_0=1}^{s_0=p_0}\left\{\frac{(R_0+S_0)\left[\cos m(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0}+a_0x\cos(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0}\right]}{1+2a_0x\cos(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0}+a_0^2x^2}\right\}\frac{1}{R_0S_0} \\
+&\frac{(-1)^m}{2a_1^m p_1}\sum_{s_1=1}^{s_1=p_1}\left\{\frac{(R_1+S_1)\left[\cos m(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1}+a_1x\cos(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1}\right]}{1+2a_1x\cos(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1}+a_1^2x^2}\right\}\frac{1}{R_1S_1} \\
+&\frac{(-1)^m}{2a_2^m p_2}\sum_{s_2=1}^{s_2=p_2}\left\{\frac{(R_2+S_2)\left[\cos m(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2}+a_2x\cos(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2}\right]}{1+2a_2x\cos(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2}+a_2^2x^2}\right\}\frac{1}{R_2S_2} \\
+&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+&\frac{(-1)^m}{2a_{n-1}^m p_{n-1}}\sum_{s_{n-1}=1}^{s_{n-1}=p_{n-1}}\left\{\frac{(R_{n-1}+S_{n-1})\left[\cos m(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}}+a_{n-1}x\cos(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}}\right]}{1+2a_{n-1}x\cos(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}}+a_{n-1}^2x^2}\right\}\frac{1}{R_{n-1}S_{n-1}} \\
+&\frac{(-1)^m}{2a_0^m p_0}\sum_{s_0=1}^{s_0=p_0}\left\{\frac{\sin m(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0}+a_0x\sin(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0}}{1+2a_0x\cos(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0}+a_0^2x^2}\right\}\frac{R_0-S_0}{R_0S_0}\sqrt{-1} \\
+&\frac{(-1)^m}{2a_1^m p_1}\sum_{s_1=1}^{s_1=p_1}\left\{\frac{\sin m(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1}+a_1x\sin(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1}}{1+2a_1x\cos(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1}+a_1^2x^2}\right\}\frac{R_1-S_1}{R_1S_1}\sqrt{-1} \\
+&\frac{(-1)^m}{2a_2^m p_2}\sum_{s_2=1}^{s_2=p_2}\left\{\frac{\sin m(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2}+a_2x\sin(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2}}{1+2a_2x\cos(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2}+a_2^2x^2}\right\}\frac{R_2-S_2}{R_2S_2}\sqrt{-1} \\
+&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

$$+ \frac{(-1)^m}{2a_{n-1}^m \, p_{n-1}} \sum_{s_{n-1}=1}^{s_{n-1}=p_{n-1}} \left\{ \frac{\sin m(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}} + a_{n-1} x \sin(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}}}{1 + 2a_{n-1} x \cos(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}} + a_{n-1}^2 x^2} \right\} \frac{R_{n-1} - S_{n-1}}{R_{n-1}\, S_{n-1}} \sqrt{-1}$$

Um nun zur Integration der in der Aufgabe gegebenen Differenzialfunktion zu gelangen, hat man es nach der letzten Gleichung III., mit der Bestimmung folgender zwei Integrationen zu thun:

$$\int \frac{A\,dx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2}, \quad \int \frac{B x\,dx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2}$$

wo A und B von x independente Grössen bezeichnen.

Nun findet man dass

$$\int \frac{A\,dx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} = \frac{2A}{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}} \operatorname{arctang} \frac{\beta + 2\gamma x}{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}} + C$$

$$\int \frac{B x\,dx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} = \frac{B}{2\gamma} \log(\alpha + \beta x + \gamma x^2)$$

$$- \frac{B\beta}{\gamma\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}} \operatorname{arctang} \frac{\beta + 2\gamma x}{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}} + C$$

demnach hat man:

$$\int \frac{\left(\cos m(2s_k - 1)\frac{\pi}{2p_k} + a_k x \cos(m+1)(2s_k - 1)\frac{\pi}{2p_k}\right)}{1 + 2a_k x \cos(2s_k - 1)\frac{\pi}{2p_k} + a^2_k x^2} dx =$$

$$= \frac{\cos(m+1)(2s_k - 1)\frac{\pi}{2p_k}}{2a_k} \log\left(1 + 2a_k x \cos(2s_k - 1)\frac{\pi}{2p_k} + a^2_k x^2\right)$$

$$+ \frac{\sin(m+1)(2s_k - 1)\frac{\pi}{2p_k}}{a_k} \operatorname{arctang} \frac{\cos(2s_k - 1)\frac{\pi}{2p_k} + a_k x}{\sin(2s_k - 1)\frac{\pi}{2p_k}} + C$$

und ebenso findet man:

$$\sqrt{-1}\int \frac{\left(\sin m(2s_k-1)\frac{\pi}{2p_k} + a_k x \sin(m+1)(2s_k-1)\frac{\pi}{2p_k}\right)}{1+2a_k x\cos(2s_k-1)\frac{\pi}{2p_k}+a^2_k} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin(m+1)(2s_k-1)\frac{\pi}{2p_k}}{2a_k} \log\left(1+2a_k x\cos(2s_k-1)\frac{\pi}{2p_k}+a^2_k x^2\right) \\ -\frac{\cos(m+1)(2s_k-1)\frac{\pi}{2p_k}}{a_k} \operatorname{arctang} \frac{\cos(2s_k-1)\frac{\pi}{2p_k}+a_k x}{\sin(2s_k-1)\frac{\pi}{2p_k}} \end{array} \right\} \sqrt{-1} + C.$$

Multiplizirt man sonach die Gleichung III. mit dx und integrirt nach derselben Grösse x so ergiebt sich folgende Integralgleichung:

$$\int \frac{x^m\,dx}{(1+[a_0 x]^{2p_0})(1+[a_0 x]^{2p_1})(1+[a_2 x]^{2p_0})\;\ldots\;(1+[a_{n-1}x]^{2p_{n-1}})} = \qquad \text{(IV.)}$$

$$= \frac{(-1)^m}{4a_0^{m+1}p_0}\sum_{s_0=1}^{s_0=p_0}\left\{\frac{(R_0+S_0)}{R_0 S_0}\cos(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0}+\frac{R_0-S_0}{R_0 S_0}\sqrt{-1}\sin(m+1)(2s_0-1)\right\}$$

$$.\ \log\left(1+2a_0 x\cos(2s_0-1)\frac{\pi}{2p^0}+a_0^2 x^2\right)$$

$$+\frac{(-1)^m}{4a_1^{m+1}p_0}\sum_{s_1=1}^{s_1=p_1}\left\{\frac{(R_1+S_1)}{R_1 S_1}\cos(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_0}+\frac{R_1-S_1}{R_1 S_1}\sqrt{-1}\sin(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1}\right\}$$

$$.\ \log\left(1+2a_1 x\cos(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_2}+a^2_1 x^2\right)$$

$$+\frac{(-1)^m}{4a_2^{m+1}p_2}\sum_{s_2=1}^{s_2=p_2}\left\{\frac{R_2+S_2}{R_2 S_2}\cos(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2}+\frac{R_2-S_2}{R_2 S_2}\sqrt{-1}\sin(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2}\right\}$$

$$.\ \log\left(1+2a_2 x\cos(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_1}+a^2_2 x^2\right)$$

$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$+\frac{(-1)^m}{4a_{n-1}^{m+1}p_{n-1}}\sum_{s_{n-1}=1}^{s_{n-1}=p_{n-1}}\left\{\frac{R_{n-1}+S_{n-1}}{R_{n-1}S_{n-1}}\cos(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_2}+\frac{R_{n-1}-S_{n-1}}{R_{n-1}S_{n-1}}\sqrt{-1}\sin(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}}\right\}$$

$$.\ \log\left(1+2a_{n-1}x\cos(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}}+a^2_{n-1}x^2\right)$$

$$+\frac{(-1)^m}{2a_0^{m+1}p_0}\sum_{s_0=1}^{s_0=p_0}\left\{\frac{R_0+S_0}{R_0\,S_0}\sin(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0}-\frac{R_0-S_0}{R_0\,S_0}\sqrt{-1}\cos(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0}\right\}$$

$$.\ \operatorname{arctang}\frac{\cos(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0}+a_0x}{\sin(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0}}$$

$$+\frac{(-1)^m}{2a_1^{m+1}p_1}\sum_{s_1=1}^{s_1=p_1}\left\{\frac{R_1+S_1}{R_1\,S_1}\sin(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_0}-\frac{R_1-S_1}{R_1\,S_1}\sqrt{-1}\cos(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1}\right\}$$

$$.\ \operatorname{arcrang}\frac{\cos(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1}+a_1x}{\sin(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1}}$$

$$+\frac{(-1)^m}{2a_2^{m+1}p_2}\sum_{s_2=1}^{s_2=p_2}\left\{\frac{R_2+S_2}{R_2\,S_2}\sin(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2}-\frac{R_2+S_2}{R_2\,S_2}\sqrt{-1}\cos(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2}\right\}$$

$$.\ \operatorname{arctang}\frac{\cos(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2}+a_2x}{\sin(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2}}$$

$$+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$+\frac{(-1)^m}{2a_{n-1}^{m+1}p_{n-1}}\sum_{s_{n-1}=1}^{s_{n-1}=p_{n-1}}\left\{\frac{R_{n-1}+S_{n-1}}{R_{n-1}\,S_{n-1}}\sin(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}}-\frac{R_{n-1}-S_{n-1}}{R_{n-1}\,S_{n-1}}\sqrt{-1}\cos(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}}\right\}$$

$$.\ \operatorname{arctang}\frac{\cos(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}}+a_{n-1}x}{\sin(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}}}+C\ ^{*})$$

Geht in der Gleichung IV. x in $-x$ über, so erhält man folgende Gleichung:

$$\int\frac{x^m\,dx}{(1+[a_0x]^{2p_0})(1+[a_1x]^{2p_1})(1+[a_2x]^{2p_2})\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ (1+[a_{n-1}x]^{2p_{n-1}})}= \qquad \text{(V.)}$$

---

*) Bemerkung. Diese Gleichung stimmt für den speziellen Fall

$$\int\frac{x^m\,dx}{(1+a^{2p}x^{2p})(1+b^{2q}x^{2q})}$$

mit der von Herrn Professor Raabe gerechneten vollkommen überein, die ich von ihm schriftlich mitgetheilt, bei der Hand habe.

$$= \frac{-1}{4a_0^{m+1}\,p_0}\sum_{s_0=1}^{s_0=p_0}\left\{\frac{R_0+S_0}{R_0\,S_0}\cos(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0}+\frac{R_0-S_0}{R_0\,S^0}\sqrt{-1}\sin(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0}\right\}$$

$$\log\left(1-2a_0x\cos(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0}+a_0^2x^2\right)$$

$$+\frac{-1}{4a_1^{m+1}\,p_1}\sum_{s_1=1}^{s_1=p_1}\left\{\frac{R_1+S_1}{R_1\,S_1}\cos(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1}+\frac{R_1-S_1}{R_1\,S_1}\sqrt{-1}\sin(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1}\right\}$$

$$.\ \log\left(1-2a_1x\cos(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1}+a_1^2x^2\right)$$

$$+\frac{-1}{4a_2^{m+1}\,p_2}\sum_{s_2=1}^{s_2=p_2}\left\{\frac{R_2+S_2}{R_2\,S_2}\cos(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2}+\frac{R_2-S_2}{R_2\,S_2}\sqrt{-1}\sin(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2}\right\}$$

$$.\ \log\left(1-2a_2x\cos(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2}+a_2^2x\right)$$

$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$+\frac{-1}{4a_{n-1}^{m+1}\,p_{n-1}}\sum_{s_{n-1}=1}^{s_{n-1}=p_{n-1}}\left\{\frac{R_{n-1}+S_{n-1}}{R_{n-1}\,S_{n-1}}\cos(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}}+\frac{R_{n-1}-S_{n-1}}{R_{n-1}\,S_{n-1}}\sqrt{-1}\sin(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}}\right\}$$

$$\log\left(1-2a_{n-1}x\cos(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}}+a_{n-1}^2x^2\right)$$

$$+\frac{1}{2a_0^{m+1}\,p_0}\sum_{s_0=1}^{s_0=p_0}\left\{\frac{R_0+S_0}{R_0\,S_0}\sin(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0}-\frac{R_0-S^0}{R_0\,S_0}\sqrt{-1}\cos(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0}\right\}$$

$$.\ \operatorname{arctang}\frac{a_0x-\cos(2_0-1)\frac{\pi}{2p_0}}{\sin(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_0}}$$

$$+\frac{1}{2a_1^{m+1}\,p_1}\sum_{s_1=1}^{s_1=p_1}\left\{\frac{R_1+S_1}{R_1\,S_1}\sin(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1}-\frac{R_1-S_1}{R_1\,S_1}\sqrt{-1}\cos(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1}\right\}$$

$$.\ \operatorname{arctang}\frac{a_1x-\cos(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1}}{\sin(2s_1-1)\frac{\pi}{2p}}$$

$$+\frac{1}{2a_2^{m+1}\,p_2}\sum_{s_2=1}^{s_2=p_2}\left\{\frac{R_2+S_2}{R_2\,S_2}\sin(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2}-\frac{R_2-S_2}{R_2\,S_2}\sqrt{-1}\cos(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2}\right\}$$

$$. \operatorname{arctang} \frac{a_2 x - \cos(2s_2 - 1)\frac{\pi}{2p_2}}{\sin(2s_2 - 1)\frac{\pi}{2p_2}}$$

$+ \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$

$$+ \frac{1}{2a_{n-1}^{m+1} p_{n-1}} \sum_{s_{n-1}=1}^{s_{n-1}=p_{n-1}} \left\{ \frac{R_{n-1}+S_{n-1}}{R_{n-1} S_{n-1}} \sin(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}} - \frac{R_{n-1}-S_{n-1}}{R_{n-1} S_{n-1}} \sqrt{-1} \cos(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}} \right\} .$$

$$. \operatorname{arctang} \frac{a_{n-1} x - \cos(2s_{n-1} - 1)\frac{\pi}{2p_{n-1}}}{\sin(2s_{n-1} - 1)\frac{\pi}{2p_{n-1}}} + C$$

Geht in der Gleichung V m in $2m + 1$ über, so erhält man folgende Integralgleichung:

$$\int \frac{x^{2m+1}\,dx}{\left(1 + (a_0 x)^{2p_0}\right)\left(1 + (a_1 x)^{2p_0}\right) 1 + (a_2 x)^{2p_0}) \ . \ . \ . \ . \ \left(1 + (a_{n-1} x)^{2p_{n-1}}\right)} =$$

$$= - \frac{1}{4a_0^{2m+2} p_0} \sum_{s_0=1}^{s_0=p_0} \left\{ \frac{R_0 + S_0}{R_0 S_0} \cos(m+1)(2s_0 - 1)\frac{\pi}{p_0} + \frac{R_0 - S_0}{R_0 S_0} \sqrt{-1} \sin(m+1)(2s_0 - 1)\frac{\pi}{p_0} \right\}$$

$$. \log\left(1 - 2a_0 x \cos(2s_0 - 1)\frac{\pi}{2p_0} + a_0^2 x^2\right)$$

$$- \frac{1}{4a_1^{2m+1} p_1} \sum_{s_1=1}^{s_1=p_1} \left\{ \frac{R_1 + S_1}{R_1 S_1} \cos(m+1)(2s_1 - 1)\frac{\pi}{p_1} + \frac{R_1 - S_1}{R^1 S_1} \sqrt{-1} \sin(m+1)(2s_1 - 1)\frac{\pi}{p_1} \right\}$$

$$. \log\left(1 - 2a_1 x \cos(2s_1 - 1)\frac{\pi}{2p_1} + a_1^2 x^2\right)$$

$$- \frac{1}{2a_2^{2m+2} p_2} \sum_{s_2=1}^{s_2=p_2} \left\{ \frac{R_2 + S_2}{R_2 S_2} \cos(m+1)(2s_2 - 1)\frac{\pi}{p_2} + \frac{R_2 - S_2}{R_2 S_2} \sqrt{-1} \sin(m+1)(2s_2 - 1)\frac{\pi}{p_2} \right\}$$

$$. \log\left(1 - 2a_2 x \cos(2s_2 - 1)\frac{\pi}{2p_2} + a_2^2 x_2\right)$$

$- \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$

$$- \frac{1}{4a_{n-1}^{2m+2} p_{n-1}} \sum_{s_{n-1}=1}^{s_{n-1}=p_{n-1}} \left\{ \frac{R_{n-1}+S_{n-1}}{R_{n-1} S_{n-1}} \cos(m+1)(2s_{n-1} - 1)\frac{\pi}{p_{n-1}} + \frac{R_{n-1}-S_{n-1}}{R_{n-1} S_{n-1}} \sqrt{-1} \sin(m+1)(2s_{n-1} - 1)\frac{\pi}{p_{n-1}} \right\}$$

$$. \log\left(1 - 2a_{n-1} x \cos(2s_{n-1} - 1)\frac{\pi}{2p_{n-1}} + a_{n-1}^2 x^2\right)$$

$$+\frac{1}{2a_0^{2m-1}p_0}\sum_{s_0=1}^{s_0=p_0}\left\{\frac{R_0+S_0}{R_0 S_0}\sin(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{p_0}-\frac{R_0-S_0}{R_0 S_0}\sqrt{-1}\cos(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{p_0}\right\}$$

$$\operatorname{arctang}\frac{a_0 x-\cos(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0}}{\sin(2s_0-1)\frac{\pi}{2p_0}}$$

$$+\frac{1}{2a_1^{2m-2}p_1}\sum_{s_1=1}^{s_1=p_1}\left\{\frac{R_1+S_1}{R_1 S_1}\sin(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{p_1}-\frac{R_1-S_1}{R_1 S_1}\sqrt{-1}\cos(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{p_1}\right\}$$

$$\operatorname{arctang}\frac{a_1 x-\cos(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1}}{\sin(2s_1-1)\frac{\pi}{2p_1}}$$

$$+\frac{1}{2a_2^{2m-2}p_2}\sum_{s_2=1}^{s_2=p_2}\left\{\frac{R_2+S_2}{R_2 S_2}\sin(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{p_2}-\frac{R_2-S_2}{R_2 S_2}\sqrt{-1}\cos(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{p_2}\right\}$$

$$\operatorname{arctang}\frac{a_2 x-\cos(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2}}{\sin(2s_2-1)\frac{\pi}{2p_2}}$$

$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$+\frac{1}{2a_{n-1}^{2m+2}p_{n-1}}\sum_{s_{n-1}=1}^{s_{n-1}=p_{n-1}}\left\{\frac{R_{n-1}+S_{n-1}}{R_{n-1}S_{n-1}}\sin(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{p_{n-1}}-\frac{R_{n-1}-S_{n-1}}{R_{n-1}S_{n-1}}\sqrt{-1}\cos(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{p_{n-1}}\right\}$$

$$\operatorname{arctang}\frac{a_{n-1}x-\cos(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}}}{\sin(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2p_{n-1}}}+C$$

Geht nun in dieser Gleichung a_k^2 in a_k und x^2 in x, also dx in $\frac{dx}{2\sqrt{x}}$ über, so hat man mit Berücksichtigung, dass p_k und q_k vertauscht werden können, zur Bestimmung vorgelegten Integrals, nachstehende Gleichung:

$$\int\frac{x^m\,dx}{(1+(a_0x)^{q_0})(1+(a_1x)^{q_1})(1+(a_2x)^{q_2})\;.\;.\;.\;.\;(1+(a_{n-1}x)^{p_{n-1}})}=$$

$$=\frac{1}{2a_0^{m+1}p_0}\sum_{s_0=1}^{s_0=p_0}\left\{\frac{R_0+S_0}{R_0 S_0}\cos(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{q_0}+\frac{R_0-S_0}{R_0 S_0}\sqrt{-1}\sin(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{q_0}\right\}$$

$$\log\left(1-2\sqrt{a_0x}\cos(2s_0-1)\frac{\pi}{2q_0}+a_0x\right)$$

$$-\frac{1}{2a_1^{m+1}p_1}\sum_{s_1=1}^{s_1=p_1}\left\{\frac{R_1+S_1}{R_1 S_1}\cos(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{q_1}+\frac{R_1-S_1}{R_1 S_1}\sqrt{-1}\sin(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{q_1}\right\}$$

$$.\log\left(1-2\sqrt{a_1 x}\cos(2s_1-1)\frac{\pi}{2q_1}+a_1 x\right)$$

$$-\frac{1}{2a_2^{m+1}p_2}\sum_{s_2=1}^{s_2=p_2}\left\{\frac{R_2+S_2}{R_2 S_2}\cos(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{q_2}+\frac{R_2-S_2}{R_2 S_2}\sqrt{-1}\sin(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{q_2}\right\}$$

$$.\log\left(1-2\sqrt{a_2 x}\cos(2s_2-1)\frac{\pi}{2q_2}+a_2 x\right)$$

$$-\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$-\frac{1}{2a_{n-1}^{m+1}p_{n-1}}\sum_{s_{n-1}=1}^{s_{n-1}=p_{n-1}}\left\{\frac{R_{n-1}+S_{n-1}}{R_{n-1}S_{n-1}}\cos(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{q_{n-1}}+\frac{R_{n-1}-S_{n-1}}{R_{n-1}S_{n-1}}\sqrt{-1}\sin(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{q_{n-1}}\right\}$$

$$.\log\left(1-2\sqrt{a_{n-1}x}\cos(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2q_{n-1}}+a_{n-1}x\right)$$

$$+\frac{1}{a_0^{m+1}q_0}\sum_{s_0=1}^{s_0=p_0}\left\{\frac{R_0+S_0}{R_0 S_0}\sin(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{q_0}-\frac{R_0-S_0}{R_0 S_0}\sqrt{-1}\cos(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{q_0}\right\}\operatorname{arctang}\frac{\sqrt{a_0 x}-\cos(2s_0-1)\frac{\pi}{2q_0}}{\sin(2s_0-1)\frac{\pi}{2q_0}}$$

$$+\frac{1}{a_1^{m+1}p_1}\sum_{s_1=1}^{s_1=p_1}\left\{\frac{R_1+S_1}{R_1 S_1}\sin(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{q_1}-\frac{R_1-S_1}{R_1 S_1}\sqrt{-1}\cos(m+)(2s_1-1)\frac{\pi}{q_1}\right\}\operatorname{arctang}\frac{\sqrt{a_1 x}-\cos(2s_1-1)\frac{\pi}{2q_1}}{\sin(2s_1-1)\frac{\pi}{2q_1}}$$

$$+\frac{1}{a_2^{m+1}p_2}\sum_{s_2=1}^{s_2=p_2}\left\{\frac{R_2+S_2}{R_2 S_2}\sin(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{q_2}-\frac{R_2-S_2}{R_2 S_2}\sqrt{-1}\cos(m+1)(2s_2-1)\frac{\pi}{q_2}\right\}\operatorname{arctang}\frac{\sqrt{a_2 x}-\cos(2s_2-1)\frac{\pi}{2q_2}}{\sin(2s_2-1)\frac{\pi}{2q_2}}$$

$$+\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$+\frac{1}{a_{n-1}^{m+1}p_{n-1}}\sum_{s_{n-1}=1}^{s_{n-1}=p_{n-1}}\left\{\frac{R_{n-1}+S_{n-1}}{R_{n-1}S_{n-1}}\sin(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{q_{n-1}}-\frac{R_{n-1}-S_{n-1}}{R_{n-1}S_{n-1}}\sqrt{-1}\cos(m+1)(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{q_{n-1}}\right\}$$

$$.\operatorname{arctang}\frac{\sqrt{a_{n-1}x}-\cos(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2q_{n-1}}}{\sin(2s_{n-1}-1)\frac{\pi}{2q_{n-1}}}+C \qquad \text{(VIII)}$$

welches zu finden war.

Als spezieller Fall führe ich die eine Integralgleichung an, nämlich wenn:

$$q_0 = p,\; q_1 = q,\; q_2 = q_3 = q_4 = \ldots\ldots q_{n-1} = 0$$

und $a_0 = a$, $a_1 = b$ wird; denn alsdann giebt die Gleichung (VII.) nach einigen gemachten Reduktionen folgende unbestimmte Integralgleichung:

$$\int \frac{x^m\,dx}{(1 + a^p x^p)(1 + b^q x^q)} =$$

$$= \frac{-1}{pa^{m+1}} \sum_{s_0=1}^{s_0=p} \frac{\cos(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{p} + \left(\frac{b}{a}\right)^q \cos(q-m-1)(2s_0-1)\frac{\pi}{p}}{1 + 2\left(\frac{b}{a}\right)^q \cos(2s_0-1)\frac{q}{p}\pi + \left(\frac{b}{a}\right)^{2q}} \log\left(1 - 2\sqrt{ax}\cos(2s_0-1)\frac{\pi}{2p} + ax\right)$$

$$- \frac{1}{qb^{m+1}} \sum_{s_1=1}^{s_1=q} \frac{\cos(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{q} + \left(\frac{a}{b}\right)^p \cos(p-m-1)(2s_1-1)\frac{\pi}{q}}{1 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^p \cos(2s_1-1)\frac{p}{q}\pi + \left(\frac{a}{b}\right)^{2p}} \log\left(1 - 2\sqrt{bx}\cos(2s_1-1)\frac{\pi}{2q} + bx\right)$$

$$+ \frac{2}{pa^{m+1}} \sum_{s_0=1}^{s_0=p} \frac{\sin(m+1)(2s_0-1)\frac{\pi}{p} - \left(\frac{b}{a}\right)^q \sin(q-m-1)(2s_0-1)\frac{\pi}{p}}{1 + 2\left(\frac{b}{a}\right)^q \cos(2s_0-1)\frac{q}{p}\pi + \left(\frac{b}{a}\right)^{2q}} \operatorname{arctang} \frac{\sqrt{ax} - \cos(2s_0-1)\frac{\pi}{2p}}{\sin(2s_0-1)\frac{\pi}{2p}}$$

$$+ \frac{2}{qb^{m+1}} \sum_{s_1=1}^{s_1=q} \frac{\sin(m+1)(2s_1-1)\frac{\pi}{q} - \left(\frac{a}{b}\right)^p \sin(p-m-1)(2s_1-1)\frac{\pi}{q}}{1 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^p \cos(2s_1-1)\frac{p}{q}\pi + \left(\frac{a}{b}\right)^{2p}} \operatorname{arctang} \frac{\sqrt{bx} - \cos(2s_1-1)\frac{\pi}{2q}}{\sin(2s_1-1)\frac{\pi}{2q}} + C.$$

Bei der ganzen Durchführung des in Rede stehenden unbestimmten Integrals war es auf die Erhaltung des unbestimmten Integrals

$$\int \frac{x^m\,dx}{(1 + a^p x^p)^n}$$

abgesehen, was nun aus Gleichung VII leicht ist. Die nöthigen Reduktionen zur Verifikation dieses Integrals, wenn man es zwischen den Grenzen 0 und ∞ integrirt, mit den gefundenen Resultaten des gleichen Integrals von Euler, konnte ich aus Mangel an Zeit unmöglich hier mehr anbringen.

OM NÅGRA ARCUS-TANGENS-SUMMOR OCH DERAS ANVÄNDANDE TILL DEFINITA INTEGRALERS EVALUERING.

Akademisk Afhandling,

som med tillstånd af

Vidtberömda Philosophiska Fakulteten i Upsala

för Philosophiska Graden

utgifven

af

CARL FABIAN EMANUEL BJÖRLING,

Philos. Cand. af Westmanlands och Dala Nation,

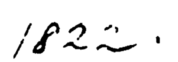
till offentlig granskning framställes

å mindre Gustavianska lärosalen Lördagen d. 16 Maj 1863

p. v. t. e. m.

WESTERÅS,

A. F. BERGH, 1863.



KONUNGENS TROMAN,
EN AF DE ADERTON I SVENSKA AKADEMIEN,
PROFESSOREN I NY-EUROPEISK LINGUISTIK OCH MODERN LITTERATUR VID UPSALA UNIVERSITET, RIDDAREN AF KONGL. NORDSTJERNE ORDEN, AF KONGL. NORSKA S:T OLAFS ORDEN OCH AF KONGL. DANSKA DANNEBROGS ORDEN

HERR DOCTOR

CARL WILHELM BÖTTIGER

med vördnad och tacksamhet egnadt

af

författaren.

Bland de grenar af Mathematiken, som under de sistförflutna decennierna utgjort föremål för nitiska och skarpsinniga forskningar, intager onekligen den s. k. imaginära analysen en framstående plats, och försåvidt den har till föremål att fixera de algebraiska och transscendenta functionstecknens rätta betydelse för complexa argumenter, torde med fog kunna sägas, att den snart nog uppfyllt sin bestämmelse, alldenstund, om ock ännu någon brist på conventionel enhet i afseende på benämningar och beteckningar — särdeles beträffande de s. k. *principala* functionerna — med deraf följande olägenheter qvarstår, likväl samtliga de algebraiska och transscendenta functionerna med complexa qvantiteter erhållit en på vetenskapliga grunder stödd tolkning.

Hvilka delar af vetenskapen härvid legat till grund, är lätt insedt. Hvarje nybegynnare inom analysen vet, att det är införandet af de trigonometriska functionerna och användandet af trigonometriens formler, som nyssnämnda theori har att tacka för sina betydande framsteg. Också låter sig detta sammanhang mellan den imaginära analysen och den elementära trigonometrien tydligen skönjas hela analysen igenom; hvadan det ock med fog torde kunna sättas i fråga, huruvida icke äfven för sjelfva de trigonometriska och cyclometriska functionernas theori någon vinst, eller åtminstone några antydningar och anledningar till kommande upptäckter vore att hämta af denna deras sammanställande med de complexa qvantiteterna. Så till exempel kan det icke gerna slå felt, att en utvidgad kännedom om de s. k. faculteterna och factoriellerna med complex bas måste leda till åtskilliga upptäckter angående summering af serier af cyclometriska — och in specie arcus-tangens- — functioner. Att i detta afseende gifva en — om ock högst ofullständigt utförd — antydan är det ena ändamålet med följande uppsats, en antydan, hvilken vi hoppas framdeles blifva i tillfälle att vidare fullfölja.

Den nästan totala saknaden af föregående arbeten i denna väg har naturligtvis varit en af de hufvudsakliga anledningarne till, att vi måst inskränka oss till en dylik «antydan.» Så vidt vi hafva oss bekant, har ingen författare närmare undersökt någon af de complexa factoriellerna — med ett enda undantag. I Crelle's Journal, T. XLIII, pag. 283 har nemligen Dr Raabe i en afhandling: «Ueber die Factorielle $\binom{p+qi}{m}$, meddelat resultaterna af sina undersökningar öfver en af dessa functioner, och det just öfver en af de intressantaste och oftast förekommande, nemligen sjelfva binomialcoëffi-

cienten. Författaren har deruti förmedelst ett ganska enkelt artificium lyckats erhålla uttryck för både den reela och den imaginära delen af ifrågavarande function, och sedermera användt dessa expressioner till några definita integralers evaluering. Som emedlertid detta arbete dels är af något speciel natur, dels ock de deruti erhållna resultater måhända något för vidlyftiga för att utan ytterligare bearbetning vara rätt användbara för det ändamål, som här är afsedt, hafva vi i det följande ej af dem gjort någon användning, utan föredragit att uttrycka de här förekommande factoriellerna och således äfven de cyclometriska functioner, nemligen Arcus-tangens-summor, för hvilka de tjenat till uttryck, på det närmast till hands liggande sättet, nemligen i combinationer dels af de första hela talen, dels af de qvantiteter, som utgöra bågarnes argumenter.

Intresset för dylika Arcus-tangens-summor och värdet af formler, förmedelst hvilka deras valör med lätthet och noggrannhet kan beräknas, erhåller ock af en särskild anledning ett nytt motiv, i det nemligen en ganska stor mängd definita integraler låta sig förmedelst dem evalueras. Dels för att härpå gifva exempel, dels i den förhoppning, att ett — om än obetydligt — bidrag till kännedomen af dessa functioner torde kunna blifva till gagn, hafva vi i det följande framställt ett urval bland dessa, hvilket, fastän jemförelsevis fåtaligt, dock torde vara tillräckligt för att gifva ett begrepp om det tvifvelsutan ganska betydliga bidrag till de definita integralernas theori, som kan väntas af ett djupare och utförligare studium af ämnet. De formler af detta slag, som här nedan blifvit upptagna, utgöra hufvudsakligen, såsom man lätt kan öfvertyga sig, blotta utvidgningar af sedan gammalt kända relationer, ehuru de, äfven såsom sådana, torde i det sammanhang, hvari de här betraktas, förtjena uppmärksamhet. För öfrigt äro de ej — försåvidt vi kunnat finna — upptagna i den fullständiga och förträffliga samling af dylika functioner, som under titel «Tables d'intégrales définies» utgifvits af M. Bierens de Haan.

§ 1.

Den välbekanta relationen

$$(1) \qquad a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}\,(\text{Cos}\,\vartheta + i\,\text{Sin}\,\vartheta),$$

der med a och b förstås reela qvantiteter, med i den imaginära enheten, och med ϑ hvilken som helst af de bågar, hvilkas Sinus och Cosinus satisfiera vilkoren

$$\text{Cos}\,\vartheta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\text{Sin}\,\vartheta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

kan, om i stället för ϑ sättes $\text{Arctg}\,\frac{b}{a}$ (begränsad af $\pm\,\frac{\pi}{2}$), skrifvas:

$$(2) \qquad a + bi = \pm\,\sqrt{a^2+b^2}\left(\text{Cos Arctg}\,\frac{b}{a} + i\,\text{Sin Arctg}\,\frac{b}{a}\right),$$

med vilkor, att det öfre eller nedre tecknet begagnas, allteftersom a är positivt eller negativt. I stället för (2) kan man således sätta:

$$(3) \qquad a + bi = a\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}\left(\text{Cos Arctg}\,\frac{b}{a} + i\,\text{Sin Arctg}\,\frac{b}{a}\right)$$

På samma sätt erhålles

$$a + 2bi = a\sqrt{1 + \left(\frac{2b}{a}\right)^2}\left(\text{Cos Arctg}\,\frac{2b}{a} + i\,\text{Sin Arctg}\,\frac{2b}{a}\right),$$

$$a + 3bi = a\sqrt{1 + \left(\frac{3b}{a}\right)^2}\left(\text{Cos Arctg}\,\frac{3b}{a} + i\,\text{Sin Arctg}\,\frac{3b}{a}\right),$$

. . . .

$$a + nbi = a\sqrt{1 + \left(\frac{nb}{a}\right)^2}\left(\text{Cos Arctg}\,\frac{nb}{a} + i\,\text{Sin Arctg}\,\frac{nb}{a}\right).$$

Multiplicera vi med hvarandra dessa eqvationer, så blir resultatet

$$(4)\ \text{P}_n\,(a + nbi)^{1)} = a^n\sqrt{\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]\left[1 + \left(\frac{2b}{a}\right)^2\right]\ldots\left[1 + \left(\frac{nb}{a}\right)^2\right]}\left\{\text{Cos}\sum_{n=1}^{n=n}\text{Arctg}\,\frac{nb}{a} + i\,\text{Sin}\sum_{n=1}^{n=n}\text{Arctg}\,\frac{nb}{a}\right\},$$

---

[1] Så beteckna vi här och i det följande factoriellen

$$(a + bi)\,(a + 2bi)\,(a + 3bi)\ldots(a + nbi).$$

eller korteligen

$$(5) \qquad P_n(a+nbi) = a^n \rho.(\mathrm{Cos}\, \mathfrak{A}_{\left(\frac{nb}{a}\right)} + i\, \mathrm{Sin}\, \mathfrak{A}_{\left(\frac{nb}{a}\right)})$$

Insättes i denna eqvation $-b$ i stället för b, så blir

$$(6) \qquad P_n(a-nbi) = a^n \rho.(\mathrm{Cos}\, \mathfrak{A}_{\left(\frac{nb}{a}\right)} - i\, \mathrm{Sin}\, \mathfrak{A}_{\left(\frac{nb}{a}\right)})$$

Genom addition och subtraction af (5) och (6) erhållas uttrycken:

$$(7) \qquad P_n(a+nbi) + P_n(a-nbi) = 2a^n \rho.\ \mathrm{Cos}\, \mathfrak{A}_{\left(\frac{nb}{a}\right)}$$

$$(8) \qquad P_n(a+nbi) - P_n(a-nbi) = 2a^n \rho.\, i\, \mathrm{Sin}\, \mathfrak{A}_{\left(\frac{nb}{a}\right)}$$

och ur dessa slutligen genom division

$$(9) \qquad \mathrm{Tg}\, \mathfrak{A}_{\left(\frac{nb}{a}\right)} = \frac{1}{i} \cdot \frac{P_n(a+nbi) - P_n(a-nbi)}{P_n(a+nbi) + P_n(a-nbi)}$$

§ 2.

Det uttryck för $\mathrm{Tg}\, \mathfrak{A}_{\left(\frac{nb}{a}\right)}$, som vi i (9) erhållit, kan transformeras till en — åtminstone för numerisk kalkyl — mera användbar form genom utveckling af de deruti förekommande factoriellerna.

Uppenbarligen är

$$(10) \qquad P_n(a+nbi) = a^n + s_1 a^{n-1} bi + s_2 a^{n-2}(bi)^2 + \cdots + s_{n-2} a^2 (bi)^{n-2} + s_{n-1} a (bi)^{n-1} + s_n (bi)^n,$$ [1]

då man med s_m förstår summan af de m-lediga producterna af de n första hela talen.

Likaså är, om n är ett jemnt tal,

$$(11) \qquad P_n(a-nbi) = a^n - s_1 a^{n-1} bi + s_2 a^{n-2}(bi)^2 - \cdots + s_{n-2} a^2 (bi)^{n-2} - s_{n-1} a (bi)^{n-1} + s_n (bi)^n.$$

Insättas dessa uttryck på $P_n(a+nbi)$ och $P_n(a-nbi)$ i eqv. (9), så blir resultatet:

$$\mathrm{Tg}\, \mathfrak{A}_{\left(\frac{nb}{a}\right)} = \frac{1}{i} \cdot \frac{s_1 a^{n-1} bi + s_3 a^{n-3}(bi)^3 + s_5 a^{n-5}(bi)^5 + \cdots + s_{n-3} a^3 (bi)^{n-3} + s_{n-1} a (bi)^{n-1}}{a^n + s_2 a^{n-2}(bi)^2 + s_4 a^{n-4}(bi)^4 + \cdots\cdots + s_{n-2} a^2 (bi)^{n-2} + s_n (bi)^n} =$$

$$(12) \qquad = \frac{s_1 a^{n-1} b - s_3 a^{n-3} b^3 + s_5 a^{n-5} b^5 - \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}} . s_{n-3} a^3 b^{n-3} + (-1)^{\frac{n}{2}-1} . s_{n-1} a b^{n-1}}{a^n - s_2 a^{n-2} b^2 + s_4 a^{n-4} b^4 - \cdots\cdots + (-1)^{\frac{n}{2}-1} . s_{n-2} a^2 b^{n-2} + (-1)^{\frac{n}{2}} . s_n b^n}.$$

I händelse n är udda, blir deremot

$$(13) \qquad P_n(a-nbi) = a^n - s_1 a^{n-1} bi + s_2 a^{n-2}(bi)^2 - \cdots\cdots - s_{n-2} a^2 (bi)^{n-2} + s_{n-1} a (bi)^{n-1} - s_n (bi)^n,$$

---

[1] Såsom sjelfklart är, blott man erinrar sig den bekanta lagen om sammanhanget mellan en eqvations rötter och coëfficienter.

samt

$$\text{Tg}\,\mathfrak{A}_{\left(\frac{nb}{a}\right)} = \frac{1}{i}\,\frac{s_1 a^{n-1} bi + s_3 a^{n-3}(bi)^3 + s_5 a^{n-5}(bi)^5 + \cdots + s_{n-2} a^2 (bi)^{n-2} + s_n (bi)^n}{a^n + s_2 a^{n-2}(bi)^2 + s_4 a^{n-4}(bi)^4 + \cdots\cdots + s_{n-3} a^3 (bi)^{n-3} + s_{n-1} a (bi)^{n-1}} =$$

$$(14) \qquad = \frac{s_1 a^{n-1} b - s_3 a^{n-3} b^3 + s_5 a^{n-5} b^5 - \cdots + (-1)^{\frac{n+1}{2}} s_{n-2} a^2 b^{n-2} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} s_n b^n}{a^n - s_2 a^{n-2} b^2 + s_4 a^{n-4} b^4 - \cdots\cdots + (-1)^{\frac{n+1}{2}} s_{n-3} a^3 b^{n-3} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} s_{n-1} a b^{n-1}}.$$

För lättare öfversigt sammanställa vi dessa relationer under följande sammandragna form:

a) n jemnt,

$$(12') \qquad \text{Tg}\,\mathfrak{A}_{\left(\frac{nb}{a}\right)} = \frac{\underset{\lambda=0}{\overset{\lambda=\frac{n}{2}-1}{S}} (-1)^\lambda \, s_{2\lambda+1} \,.\, a^{n-2\lambda-1} \, b^{2\lambda+1}}{\underset{\lambda=0}{\overset{\lambda=\frac{n}{2}}{S}} (-1)^\lambda \, s_{2\lambda} \,.\, a^{n-2\lambda} \, b^{2\lambda}}$$

b) n udda,

$$(14') \qquad \text{Tg}\,\mathfrak{A}_{\left(\frac{nb}{b}\right)} = \frac{\underset{\lambda=0}{\overset{\lambda=\frac{n-1}{2}}{S}} (-1)^\lambda \, s_{2\lambda+1} \,.\, a^{n-2\lambda-1} \, b^{2\lambda+1}}{\underset{\lambda=0}{\overset{\lambda=\frac{n-1}{2}}{S}} (-1)^\lambda \, s_{2\lambda} \,.\, a^{n-2\lambda} \, b^{2\lambda}}$$

§ 3.

Medelst dessa formler kan man alltså beräkna tangentens valör för hvarje förhandenvarande Arcus-summa $\mathfrak{A}_{\left(\frac{nb}{a}\right)}$. Och af det, som derutöfver erfordras för kännedom af sjelfva summans valör, nemligen 1:o) inom hvilken qvadrant den slutar, och 2:o) huru många hela peripherier deruti innehållas, angifves det förra redan af eqvationerna (7) och (8) genom behörigt afseende på tecknen, och beträffande det sednare är det för vårt föresatta mål — sådant det i inledningen blifvit antydt — ingalunda nödigt att här ingå i någon fullständigt genomförd undersökning. Det är nemligen vida lättare — och torde t. o. m. sällan möta några synnerliga svårigheter — att i enskilda fall (då a och b eller åtminstone endera har bestämd numerisk valör) komma till så pass stor noggrannhet, som för beräkning af $\mathfrak{A}$ erfordras, än att angifva en i alla möjliga fall användbar och praktiskt fördelaktig method att vinna behörig visshet i nämnde afseende. Vi inskränka oss således till att blott på detta ställe — i förbigående och likasom förslagsvis — antyda en enkel och nära till hands liggande method, för-

medelst hvilken man — åtminstone i ganska många fall — kan med lätthet innestänga en Arcus tangens-summa inom 2:ne gränser, nog nära hvarandra, för att någon ovisshet i afseende på densammas valör ej vidare må vara att befara, och skola vi dervid, för enkelhets skull, gå så till väga, som vore frågan allenast om *den* summa, som utgjort föremål för de begge föregående paragr. 1 och 2, och låta a och b vara positiva qvantiteter.

I den händelse, med hvilken vi först vilje sysselsätta oss, att b är $\geqq a$, kan — såsom bekant är — $\operatorname{Arctg} \frac{nb}{a}$ utvecklas i serie efter schemat:

$$\operatorname{Arctg} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \tag{15}$$

Som termernas i denna serie numeriska valör ända från början oupphörligt aftager, så kan man med all säkerhet sluta, att

$$\frac{\pi}{2} > \operatorname{Arctg} x > \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}\text{[1]} \tag{16}$$

Således är ock

$$\frac{\pi}{2} > \operatorname{Arctg} \frac{b}{a} > \frac{\pi}{2} - \frac{a}{b}$$

$$\frac{\pi}{2} > \operatorname{Arctg} \frac{2b}{a} > \frac{\pi}{2} - \frac{a}{2b}$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$\frac{\pi}{2} > \operatorname{Arctg} \frac{nb}{a} > \frac{\pi}{2} - \frac{a}{nb},$$

och efter summering af dessa olikheter,

$$\frac{n\pi}{2} > \mathfrak{A}_{\left(\frac{nb}{\lambda}\right)} > \frac{n\pi}{2} - \frac{a}{b} \cdot \mathop{\mathrm{S}}_{\lambda=1}^{\lambda=n} \left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{17}$$

Och emedan $\mathop{\mathrm{S}}_{\lambda=1}^{\lambda=n} \left(\frac{1}{\lambda}\right)$ först för n-värden, vida högre än 100, uppnår[2] valören 2π, så följer, att dessförinnan summan $\mathfrak{A}_{\left(\frac{nb}{\lambda}\right)}$, då b är $\geqq a$, differerar från gränsen $\frac{n\pi}{2}$ med en qvantitet mindre än en hel peripheri.

---

[1] Till samma slutsats kan man ock komma blott genom att erinra sig de bekanta relationerna:

$$\operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \text{ och}$$

$$\operatorname{Arctg} \frac{1}{x} < \frac{1}{x}.$$

Således gäller (16), äfven om x är < 1.

[2] Eytelwein, Grundlehren der höheren Analysis, B. 2, pag. 647.

År deremot $a \geqq nb$, så erhålles på ett med det förra analogt sätt, och med användande af formeln

$$(18) \qquad \operatorname{Arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots\cdots, (x \leqq 1)$$

$$(19) \qquad \frac{b}{a} \cdot \mathop{\mathfrak{S}}_{\lambda=1}^{\lambda=n} (\lambda) > \mathfrak{A}_{\left(\frac{nb}{a}\right)} > \frac{b}{a} \cdot \mathop{\mathfrak{S}}_{\lambda=1}^{\lambda=n} (\lambda) - \frac{b^3}{3a^3} \cdot \mathop{\mathfrak{S}}_{\lambda=n}^{\lambda=n} (\lambda^3).$$

Men nu är enligt vårt antagande

$$\frac{b^3}{3a^3} \cdot \mathop{\mathfrak{S}}_{\lambda=1}^{\lambda=n} (\lambda^3) < \frac{1}{3n^3} \cdot \mathop{\mathfrak{S}}_{\lambda=1}^{\lambda=n} (\lambda^3),$$ eller — enligt en bekant formel[1] —

$$< \frac{(n+1)^2}{12n}.$$

Och som denna sistnämnda qvantitet först för $n > 70$ uppgår till 2π, så torde det nu anförda criteriet i allmänhet göra tillfyllest[2]. Skulle emedlertid större noggrannhet erfordras, så vinnes den naturligtvis genom att medtaga flere termer af serien (18).

Ligger åter a till sin storlek mellan b och nb, så kan seriesumman $\mathfrak{A}_{\left(\frac{nb}{a}\right)}$ indelas i tvenne delar, af hvilka hvardera för sig kan, genom användande af formlerna (17) och (19) innestängas inom vederbörliga gränser.

§ 4.

Bland öfriga frågor, till hvilkas besvarande formlerna (12) och (14) kunna med fördel användas, må följande märkas.

1) Huru stort bör a eller b tagas, om den ena af dessa qvantiteter blifvit till sin valör bestämd, för att $\mathfrak{A}_{\left(\frac{nb}{a}\right)}$ skall blifva lika med ett udda antal $\frac{\pi}{2}$? Besvaras genom solution, i afseende på a eller b, af eqvationen:

$$(20) \qquad a^n - s_2 a^{n-2} b^2 + s_4 a^{n-4} b^4 - \cdots\cdots + (-1)^{\frac{n}{2}-1} \cdot s_{n-2} a^2 b^{n-2} + (-1)^{\frac{n}{2}} s_n b^n = o,$$

om n är jemnt, och af eqvationen:

$$(21) \qquad a^n - s_2 a^{n-2} b^2 + s_4 a^{n-4} b^4 - \cdots\cdots + (-1)^{\frac{n+1}{2}} s_{n-3} a^3 b^{n-3} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} s_{n-1} a b^{n-1} = o,$$

om n är udda.

[1] Schlömilch, Theorie der Differenzen u. Summen, pag. 95.

[2] Helst som föregående formler svårligen kunna med någon fördel användas för så höga n-värden.

Den förras rötter äro, som man ser, till antalet n, numeriskt lika 2 och 2, och af motsatta tecken; den sednares $n-1$, af samma beskaffenhet, och dessutom, i händelse a anses såsom obekant, en $= o$.

För öfrigt förete dessa eqvationer, likasom åtskilliga af de följande, en anmärkningsvärd egenhet. Beteckna vi för ett ögonblick summorna af den förras a-rötters 1-, 2-, 3-, ... n-lediga producter med $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots \sigma_n$, så är nemligen

$$\sigma_1 = o^{1)} = \sigma_3 = \sigma_5 = \cdots\cdots = \sigma_{n-3} = \sigma_{n-1},$$

$$\sigma_2 = -b^2 s_2\,;\ \sigma_4 = b^4 s_4\,;\cdots\cdots\ \sigma_{n-2} = (-1)^{\frac{n}{2}-1} . b^{n-2} s_{n-2}\,;\ \sigma_n = (-1)^{\frac{n}{2}} b^n s_n.$$

Att något egendomligt samband förefinnes mellan dessa eqvationers rötter och de n första hela talen, torde man alltså kunna taga för gifvet. För att icke afvika för långt från vårt ämne, hafva vi likväl tills vidare måst lemna undersökningen af denna tvifvelsutan intressanta fråga derhän.

2) Huru stort bör, under samma förutsättning som nyss, a eller b vara, för att $\mathfrak{A}_{\left(\frac{nb}{a}\right)}$ skall blifva lika med ett jemnt antal $\frac{\pi}{2}$?

Eqvationerna blifva i detta fall:

$$(22)\qquad s_1 a^{n-1} b - s_3 a^{n-3} b^3 + s_5 a^{n-5} b^5 - \cdots\cdots + (-1)^{\frac{n}{2}} . s_{n-3} a^3 b^{n-3} + (-1)^{\frac{n}{2}-1} . s_{n-1} a b^{n-1} = o,$$

om n är jemnt, och

$$(23)\qquad s_1 a^{n-1} b - s_3 a^{n-3} b^3 + s_5 a^{n-5} b^5 - \cdots\cdots + (-1)^{\frac{n+1}{2}} . s_{n-2} a^2 b^{n-2} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} . s_n b^n = o,$$

om n är udda.

Den förras rötter äro till antalet $n-2$, numeriskt lika 2 och 2, och af motsatta tecken, samt en $= o$; den sednares $n-1$, af dylik beskaffenhet, och dessutom, i fall b anses såsom obekant, en $= o$.

3) I allmänhet: Huru stort bör a eller b vara, för att den ifrågavarande Arcustangens-summans Sinus och Cosinus skola stå till hvarandra i ett uppgifvet förhållande $(k:1)$?

I händelse n är jemnt, behöfver man till frågans besvarande blott solvera eqvationen:

$$k = \frac{s_1 a^{n-1} b - s_3 a^{n-3} b^3 + \cdots\cdots\cdots + (-1)^{\frac{n}{2}} s_{n-3} a^3 b^{n-3} + (-1)^{\frac{n}{2}-1} . s_{n-1} a b^{n-1}}{a^n - s_2 a^{n-2} b^2 + s_4 a^{n-4} b^4 - \cdots\cdots + (-1)^{\frac{n}{2}-1} . s_{n-2} a^2 b^{n-2} + (-1)^{\frac{n}{2}} . s_n b^n},$$

eller

$$(24)\quad k a^n - s_1 a^{n-1} b - k s_2 a^{n-2} b^2 + s_3 a^{n-3} b^3 + \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}-1} . k s_{n-2} a^2 b^{n-2} + (-1)^{\frac{n}{2}} s_{n-1} a b^{n-1} + \\ + (-1)^{\frac{n}{2}} k s_n b^n = o.$$

1) En naturlig följd af den omständigheten, att rötterna äro numeriskt lika 2 och 2, och af motsatta tecken.

Om deremot n är udda, blir vår eqvation:

$$(25)\quad ka^n - s_1a^{n-1}b - ks_2a^{n-2}b^2 + s_3a^{n-3}b^3 + \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} s_{n-2}a^2b^{n-2} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} ks_{n-1}ab^{n-1} + (-1)^{\frac{n+1}{2}} s_nb^n = o.$$

Antages i dessa eqvationer — för enkelhets skull — b obekant och a positiv, så har den förra lika många tecken-variationer som permanenser, den sednare deremot en variation mer, om k är positiv, en permanens mer i motsatt fall. Anledningen härtill är lätt insedd. Emedan nemligen, då b växer från $-\infty$ till $+\infty$, $\mathfrak{A}_{(\frac{nb}{a})}$ successivt erhåller alla möjliga valörer från $-\frac{n\pi}{2}$ till $+\frac{n\pi}{2}$; så måste den tydligen, om n är jemnt, under sin tillväxt från $-\frac{n\pi}{2}$ till o, passera igenom $\frac{n}{2}$ punkter, der dess Sinus och Cosinus satisfiera det uppgifna vilkoret — alldenstund inom hvarje half-peripheri alltid *en* och blott *en* sådan punkt finnes — och lika många under sin passage från o till $+\frac{n\pi}{2}$. Är deremot n udda och k positivt, så måste $\mathfrak{A}_{(\frac{nb}{a})}$ under sin tillväxt från o till $+\frac{n\pi}{2}$ passera igenom $\frac{n+1}{2}$ dylika punkter — alldenstund ibland n qvadranter, räknade från o åt det positiva hållet, $\frac{n+1}{2}$ äro så beskaffade, att de bågar, som inom dem sluta, hafva Sinus och Cosinus af samma tecken — och således blott $\frac{n-1}{2}$ under sin passage från $-\frac{n\pi}{2}$ till o. Är åter k negativt, så blir förhållandet naturligtvis motsatt.

Den egenhet, som redan i 1) blifvit omnämnd, framträder här i vissa fall ännu tydligare. Antages t. ex. $k = b = 1$, så blir (24)

$$a^n - s_1a^{n-1} - s_2a^{n-2} + s_3a^{n-3} + \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}-1} . s_{n-2}\,a^2 + (-1)^{\frac{n}{2}} . s_{n-1}\,a + (-1)^{\frac{n}{2}} s_n = o,$$

och således, om samma beteckning som i 1) användes,

$$\sigma_1 = s_1\,;\ \sigma_2 = -s_2\,;\ \sigma_3 = -s_3\,;\cdots\ \sigma_{n-2} = (-1)^{\frac{n}{2}-1} . s_{n-2}\,;\ \sigma_{n-1} = (-1)^{\frac{n}{2}-1} . s_{n-1}\,;\ \sigma_n = (-1)^{\frac{n}{2}} s_n.$$

4) Hvilken valör bör b hafva för att Arctg k (k en gifven reel qvantitet) skall kunna utvecklas i en serie af samma form som $\mathfrak{A}_{(\frac{nb}{a})}$ och med ett uppgifvet antal (n) termer?

Man behöfver till detta ändamål blott uppsöka den numeriskt minsta af b-rötterna till (24) eller (25), alltefter som n är jemnt eller udda. Mot hvarje b-valör, som satisfierar den ena eller andra af dessa eqvationer, svarar nemligen ett $\mathfrak{A}_{(\frac{nb}{a})}$, som är = någon ibland Arctg$((k))$. Och emedan denna summas numeriska valör ökas eller

minskas samtidigt med b, så måste ock mot det numeriskt minsta b, som uppfyller nyssnämnde vilkor, svara det númeriskt minsta $\mathfrak{A}_{\left(\frac{nb}{a}\right)}$, således just det, som är = den numeriskt minsta ibland Arctg$((k))$, d. ä. sjelfva Arctg k.

Genom ett analogt resonnement finner man, att det värde på a, som erfordras för utvecklingen af en uppgifven Arctg k i en serie (med n termer) af formen $\mathfrak{A}_{\left(\frac{nb}{a}\right)}$, är det numeriskt största ibland dem, som satisfiera (24) eller (25).

§ 5.

Beräkningen af Tg $\overset{n=n}{\underset{n=1}{\mathrm{S}}}$ Arctg $\frac{b}{na}$ — kortligen Tg $\mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{na}\right)}$ — är numera ej underkastad några svårigheter. Likasom i § 1 erhållas relationerna:

$$a + bi = a\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}\left(\text{Cos Arctg}\,\frac{b}{a} + i\,\text{Sin Arctg}\,\frac{b}{a}\right)$$

$$2a + bi = 2a\sqrt{1 + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}\left(\text{Cos Arctg}\,\frac{b}{2a} + i\,\text{Sin Arctg}\,\frac{b}{2a}\right)$$

$$3a + bi = 3a\sqrt{1 + \left(\frac{b}{3a}\right)^2}\left(\text{Cos Arctg}\,\frac{b}{3a} + i\,\text{Sin Arctg}\,\frac{b}{3a}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$na + bi = na\sqrt{1 + \left(\frac{b}{na}\right)^2}\left(\text{Cos Arctg}\,\frac{b}{na} + i\,\text{Sin Arctg}\,\frac{b}{na}\right);$$

samt genom multiplication:

$$(26)\quad \mathrm{P}_n(na+bi) = \Gamma(n+1).a^n\sqrt{\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]\left[1 + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]\cdots\cdots\left[1 + \left(\frac{b}{na}\right)^2\right]}\left\{\text{Cos}\overset{n=n}{\underset{n=1}{\mathrm{S}}}\text{Arctg}\,\frac{b}{na} + i\,\text{Sin}\overset{n=n}{\underset{n=1}{\mathrm{S}}}\text{Arctg}\,\frac{b}{na}\right\},$$

eller kortare:

$$(27)\quad \mathrm{P}_n(na + bi) = \Gamma(n+1).a^n\rho_1\left(\text{Cos}\,\mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{na}\right)} + i\,\text{Sin}\,\mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{na}\right)}\right).$$

På samma sätt:

$$(28)\quad \mathrm{P}_n(na - bi) = \Gamma(n+1).a^n\rho_1\left(\text{Cos}\,\mathfrak{A}_{\left(\frac{nb}{a}\right)} - i\,\text{Sin}\,\mathfrak{A}_{\left(\frac{nb}{a}\right)}\right).$$

Genom addition och subtraction af (27) och (28) erhålles:

$$(29)\quad \mathrm{P}_n(na + bi) + \mathrm{P}_n(na - bi) = 2\Gamma(n+1)a^n\rho_1.\text{Cos}\,\mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{na}\right)}$$

$$(30)\quad \mathrm{P}_n(na + bi) - \mathrm{P}_n(na - bi) = 2\Gamma(n+1)a^n\rho_1.i\,\text{Sin}\,\mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{na}\right)},$$

samt ur dessa genom division:

$$\text{(31)}\qquad \operatorname{Tg}\mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{na}\right)} = \frac{1}{i}\cdot\frac{P_n(na+bi)-P_n(na-bi)}{P_n(na+bi)+P_n(na-bi)}.$$

Utan svårighet inses ock, att

$$\text{(32)}\quad P_n(na+bi) = s_n a^n + s_{n-1}a^{n-1}bi + s_{n-2}\,a^{n-2}\,(bi)^2 + \cdots + s_2\,a^2\,(bi)^{n-2} + s_1\,a\,(bi)^{n-1} + (bi)^n,$$

äfvensom att, om n är jemnt,

$$\text{(33)}\quad P_n(na-bi) = s_n a^n - s_{n-1}a^{n-1}bi + s_{n-2}\,a^{n-2}\,(bi)^2 - \cdots + s_2\,a^2\,(bi)^{n-2} - s_1\,a\,(bi)^{n-1} + (bi)^n,$$

och således, efter insättning i (31),

$$\operatorname{Tg}\mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{na}\right)} = \frac{1}{i}\cdot\frac{s_{n-1}a^{n-1}bi + s_{n-3}a^{n-3}(bi)^3 + s_{n-5}a^{n-5}(bi)^5 + \cdots + s_3a^3(bi)^{n-3} + s_1a(bi)^{n-1}}{s_na^n + s_{n-2}a^{n-2}(bi)^2 + s_{n-4}a^{n-4}(bi)^4 + \cdots\cdots + s_2a^2(bi)^{n-2} + (bi)^n} =$$

$$\text{(34)}\quad = \frac{s_{n-1}a^{n-1}b - s_{n-3}a^{n-3}b^3 + s_{n-5}a^{n-5}b^5 - \cdots\cdots + (-1)^{\frac{n}{2}}s_3a^3b^{n-3} + (-1)^{\frac{n}{2}-1}s_1ab^{n-1}}{s_na^n - s_{n-2}a^{n-2}b^2 + s_{n-4}a^{n-4}b^4 - \cdots\cdots + (-1)^{\frac{n}{2}-1}s_2a^2b^{n-2} + (-1)^{\frac{n}{2}}b^n}.$$

Om n är udda, så blir deremot

$$\text{(35)}\quad P_n(na-bi) = s_n\,a^n - s_{n-1}\,a^{n-1}\,bi + s_{n-2}a^{n-2}(bi)^2 - \cdots - s_2a^2(bi)^{n-2} + s_1a(bi)^{n-1} - (bi)^n,$$

samt

$$\operatorname{Tg}\mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{na}\right)} = \frac{1}{i}\cdot\frac{s_{n-1}a^{n-1}bi + s_{n-3}a^{n-3}(bi)^3 + s_{n-5}a^{n-5}(bi)^5 + \cdots + s_2a^2(bi)^{n-2} + (bi)^n}{s_na^n + s_{n-2}a^{n-2}(bi)^2 + s_{n-4}a^{n-4}(bi)^4 + \cdots\cdots + s_3a^3(bi)^{n-3} + s_1a(bi)^{n-1}} =$$

$$\text{(36)}\quad = \frac{s_{n-1}a^{n-1}b - s_{n-3}a^{n-3}b^3 + s_{n-5}a^{n-5}b^5 - \cdots + (-1)^{\frac{n+1}{2}}s_2a^2b^{n-2} + (-1)^{\frac{n-1}{2}}b^n}{s_na^n - s_{n-2}a^{n-2}b^2 + s_{n-4}a^{n-4}b^4 - \cdots\cdots + (-1)^{\frac{n+1}{2}}.s_3a^3b^{n-3} + (-1)^{\frac{n-1}{2}}s_1ab^{n-1}}.$$

Alltså kortligen:

a) n jemnt,

$$\text{(34')}\qquad \operatorname{Tg}\mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{na}\right)} = \frac{\displaystyle\mathop{\mathbf{S}}_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{n}{2}-1}(-1)^{\lambda}s_{n-2\lambda-1}\,.\,a^{n-2\lambda-1}\,b^{2\lambda+1}}{\displaystyle\mathop{\mathbf{S}}_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{n}{2}}(-1)^{\lambda}s_{n-2\lambda}\,.\,a^{n-2\lambda}\,b^{2\lambda}},$$

b) n udda,

$$\text{(36')}\qquad \operatorname{Tg}\mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{na}\right)} = \frac{\displaystyle\mathop{\mathbf{S}}_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{n-1}{2}}(-1)^{\lambda}s_{n-2\lambda-1}\,.\,a^{n-2\lambda-1}\,b^{2\lambda+1}}{\displaystyle\mathop{\mathbf{S}}_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{n-1}{2}}(-1)^{\lambda}s_{n-2\lambda}.\,a^{n-2\lambda}\,b^{2\lambda}}.$$

Öfriga användningar af dessa formler, likasom ock af de följande, äro så fullkomligt likartade med de i föregående paragr. behandlade, att det ej torde vara nödigt ingå i någon utförligare redogörelse derför.

§ 6.

Något mera complicerad form hafva de uttryck för $\operatorname{Tg} \overset{n=n}{\underset{n=0}{\mathfrak{S}}} \operatorname{Arctg} \frac{b-n}{a}$, som på samma väg erhållas, och till hvilkas uppsökande vi nu öfvergå.

Beteckna vi den ifrågavarande summan med $\mathfrak{A}_{\left(\frac{b-n}{a}\right)}$ och factoriellen $(a+bi)\ (a+\overline{b-1}\,i)\ (a+\overline{b-2}\,i)\ \ldots\ (a+\overline{b-n}\,i)$ med $\Pi_n(a+\overline{b-n}\,i)$, så finnes på samma sätt som förut, att

$$(37)\qquad \operatorname{Tg}\mathfrak{A}_{\left(\frac{b-n}{a}\right)} = \frac{1}{i}\cdot\frac{\Pi_n(a+\overline{b-n}\,i)-\Pi_n(a-\overline{b-n}\,i)}{\Pi_n(a+\overline{b-n}\,i)+\Pi_n(a-\overline{b-n}\,i)}.$$

Beteckna vi vidare summorna af de 1-, 2-, 3-, ... $(n+1)$-lediga producterna af qvantiteterna b, $b-1$, $b-2$, ... $b-n$ med $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3, \ldots \mathfrak{S}_{n+1}$, så inses lätt, att

$$(38)\qquad \Pi_n(a+\overline{b-n}\,i)=a^{n+1}+\mathfrak{S}_1a^ni+\mathfrak{S}_2a^{n-1}i^2+\cdots+\mathfrak{S}_{n-1}a^2i^{n-1}+\mathfrak{S}_nai^n+\mathfrak{S}_{n+1}i^{n+1},$$

samt att, om n är jemnt,

$$(39)\qquad \Pi_n(a-\overline{b-n}\,i)=a^{n+1}-\mathfrak{S}_1a^ni+\mathfrak{S}_2a^{n-1}i^2-\cdots-\mathfrak{S}_{n-1}a^2i^{n-1}+\mathfrak{S}_nai^n-\mathfrak{S}_{n+1}i^{n+1},$$

och således

$$\operatorname{Tg}\mathfrak{A}_{\left(\frac{b-n}{a}\right)} = \frac{1}{i}\cdot\frac{\mathfrak{S}_1a^ni+\mathfrak{S}_3a^{n-2}i^3+\mathfrak{S}_5a^{n-4}i^5+\cdots+\mathfrak{S}_{n-1}a^2i^{n-1}+\mathfrak{S}_{n+1}i^{n+1}}{a^{n+1}+\mathfrak{S}_2a^{n-1}i^2+\mathfrak{S}_4a^{n-3}i^4+\cdots+\mathfrak{S}_{n-2}a^3i^{n-2}+\mathfrak{S}_nai^n} =$$

$$(40)\qquad = \frac{\mathfrak{S}_1a^n-\mathfrak{S}_3a^{n-2}+\mathfrak{S}_5a^{n-4}-\cdots+(-1)^{\frac{n}{2}-1}.\mathfrak{S}_{n-1}a^2+(-1)^{\frac{n}{2}}\mathfrak{S}_{n+1}}{a^{n+1}-\mathfrak{S}_2a^{n-1}+\mathfrak{S}_4a^{n-3}-\cdots+(-1)^{\frac{n}{2}-1}.\mathfrak{S}_{n-2}a^3+(-1)^{\frac{n}{2}}\mathfrak{S}_na}.$$

Är deremot n udda, så blir

$$(41)\qquad \Pi_n(a-\overline{b-n}\,i)=a^{n+1}-\mathfrak{S}_1a^ni+\mathfrak{S}_2a^{n-1}i^2-\cdots+\mathfrak{S}_{n-1}a^2i^{n-1}-\mathfrak{S}_nai^n+\mathfrak{S}_{n+1}i^{n+1},$$

samt

$$\operatorname{Tg}\mathfrak{A}_{\left(\frac{b-n}{a}\right)} = \frac{1}{i}\cdot\frac{\mathfrak{S}_1a^ni+\mathfrak{S}_3a^{n-2}i^3+\mathfrak{S}_5a^{n-4}i^5+\cdots+\mathfrak{S}_{n-2}a^3i^{n-2}+\mathfrak{S}_nai^n}{a^{n+1}+\mathfrak{S}_2a^{n-1}i^2+\mathfrak{S}_4a^{n-3}i^4+\cdots+\mathfrak{S}_{n-1}a^2i^{n-1}+\mathfrak{S}_{n+1}i^{n+1}} =$$

$$(42)\qquad = \frac{\mathfrak{S}_1a^n-\mathfrak{S}_3a^{n-2}+\mathfrak{S}_5a^{n-4}-\cdots+(-1)^{\frac{n+1}{2}}\mathfrak{S}_{n-2}a^3+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\mathfrak{S}_na}{a^{n+1}-\mathfrak{S}_2a^{n-1}+\mathfrak{S}_4a^{n-3}-\cdots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\mathfrak{S}_{n-1}a^2+(-1)^{\frac{n+1}{2}}\mathfrak{S}_{n+1}}.$$

Med få ord alltså:

a) n jemnt,

$$\text{(40')}\qquad \operatorname{Tg}\mathfrak{A}_{\left(\frac{b-n}{a}\right)} = \frac{\displaystyle\mathop{S}_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{n}{2}}(-1)^{\lambda}\mathfrak{S}_{2\lambda+1}.a^{n-2\lambda}}{\displaystyle\mathop{S}_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{n}{2}}(-1)^{\lambda}\mathfrak{S}_{2\lambda}.a^{n-2\lambda+1}},$$

b) n udda,

$$\text{(42')}\qquad \operatorname{Tg}\mathfrak{A}_{\left(\frac{b-n}{a}\right)} = \frac{\displaystyle\mathop{S}_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{n-1}{2}}(-1)^{\lambda}\mathfrak{S}_{2\lambda+1}.a^{n-2\lambda}}{\displaystyle\mathop{S}_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{n+1}{2}}(-1)^{\lambda}\mathfrak{S}_{2\lambda}.a^{n-2\lambda+1}}.$$

§ 7.

Beteckna vi slutligen $\mathop{S}_{n=0}^{n=n}\operatorname{Arctg}\frac{b}{a-n}$ med $\mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{a-n}\right)}$, och factoriellen $(a+bi)(a-1+bi)(a-2+bi)\ldots(a-n+bi)$ med $\Pi_n(a-n+bi)$, så erhålles genom användande af samma method, som vi förut begagnat:

$$\text{(43)}\qquad \operatorname{Tg}\mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{a-n}\right)} = \frac{1}{i}\cdot\frac{\Pi_n(a-n+bi)-\Pi_n(a-n-bi)}{\Pi_n(a-n+bi)+\Pi_n(a-n-bi)}.$$

Låta vi här $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3, \cdots \mathfrak{S}_{n+1}$ betyda summorna af de 1-, 2-, 3-, ...$(n+1)$-lediga producterna af qvantiteterna a, $a-1$, $a-2, \cdots a-n$, så erhålles likheten:

(44) $\Pi_n(a-n+bi)=\mathfrak{S}_{n+1}+\mathfrak{S}_n bi+\mathfrak{S}_{n-1}(bi)^2+\cdots+\mathfrak{S}_2(bi)^{n-1}+\mathfrak{S}_1(bi)^n+(bi)^{n+1}$;

samt, om n är jemnt:

(45) $\Pi_n(a-n-bi)=\mathfrak{S}_{n+1}-\mathfrak{S}_n bi+\mathfrak{S}_{n-1}(bi)^2-\cdots-\mathfrak{S}_2(bi)^{n-1}+\mathfrak{S}_1(bi)^n-(bi)^{n+1}$;

och således:

$$\operatorname{Tg}\mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{a-n}\right)} = \frac{1}{i}\cdot\frac{\mathfrak{S}_n bi+\mathfrak{S}_{n-2}(bi)^3+\mathfrak{S}_{n-4}(bi)^5+\cdots+\mathfrak{S}_4(bi)^{n-3}+\mathfrak{S}_2(bi)^{n-1}+(bi)^{n+1}}{\mathfrak{S}_{n+1}+\mathfrak{S}_{n-1}(bi)^2+\mathfrak{S}_{n-3}(bi)^4+\cdots+\mathfrak{S}_5(bi)^{n-4}+\mathfrak{S}_3(bi)^{n-2}+\mathfrak{S}_1(bi)^n} =$$

$$\text{(46)}\qquad = \frac{\mathfrak{S}_n b-\mathfrak{S}_{n-2}b^3+\mathfrak{S}_{n-4}b^5-\cdots+(-1)^{\frac{n}{2}}\mathfrak{S}_4 b^{n-3}+(-1)^{\frac{n}{2}-1}\mathfrak{S}_2 b^{n-1}+(-1)^{\frac{n}{2}}b^{n+1}}{\mathfrak{S}_{n+1}-\mathfrak{S}_{n-1}b^2+\mathfrak{S}_{n-3}b^4-\cdots+(-1)^{\frac{n}{2}}\mathfrak{S}_5 b^{n-4}+(-1)^{\frac{n}{2}-1}\mathfrak{S}_3 b^{n-2}+(-1)^{\frac{n}{2}}\mathfrak{S}_1 b^n}.$$

Är åter n udda, så blifva våra uttryck de följande:

(47) $\Pi_n(a-n-bi)=\mathfrak{S}_{n+1}-\mathfrak{S}_n bi+\mathfrak{S}_{n-1}(bi)^2-\cdots+\mathfrak{S}_2(bi)^{n-1}-\mathfrak{S}_1(bi)^n+(bi)^{n+1}$,

samt

$$\mathrm{Tg}\mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{a-n}\right)} = \frac{1}{i} \cdot \frac{\mathfrak{S}_n bi + \mathfrak{S}_{n-2}(bi)^3 + \mathfrak{S}_{n-4}(bi)^5 + \cdots + \mathfrak{S}_5(bi)^{n-4} + \mathfrak{S}_3(bi)^{n-2} + \mathfrak{S}_1(bi)^n}{\mathfrak{S}_{n+1} + \mathfrak{S}_{n-1}(bi)^2 + \mathfrak{S}_{n-3}(bi)^4 + \cdots + \mathfrak{S}_4(bi)^{n-3} + \mathfrak{S}_2(bi)^{n-1} + (bi)^{n+1}} =$$

$$(48) \quad = \frac{\mathfrak{S}_n b - \mathfrak{S}_{n-2}b^3 + \mathfrak{S}_{n-4}b^5 - \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\mathfrak{S}_5 b^{n-4} + (-1)^{\frac{n+1}{2}}\mathfrak{S}_3 b^{n-2} + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\mathfrak{S}_1 b^n}{\mathfrak{S}_{n+1} - \mathfrak{S}_{n-1}b^2 + \mathfrak{S}_{n-3}b^4 - \cdots + (-1)^{\frac{n+1}{2}}\mathfrak{S}_4 b^{n-3} + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\mathfrak{S}_2 b^{n-1} + (-1)^{\frac{n+1}{2}} b^{n+1}}.$$

Alltså i korthet:

a) n jemnt,

$$(46') \qquad \mathrm{Tg}\mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{a-n}\right)} = \frac{\sum\limits_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{n}{2}} (-1)^{\lambda} \cdot \mathfrak{S}_{n-2\lambda} \cdot b^{2\lambda+1}}{\sum\limits_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{n}{2}} (-1)^{\lambda} \cdot \mathfrak{S}_{n-2\lambda+1} \cdot b^{2\lambda}},$$

b) n udda,

$$(48') \qquad \mathrm{Tg}\mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{a-n}\right)} = \frac{\sum\limits_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{n-1}{2}} (-1)^{\lambda} \cdot \mathfrak{S}_{n-2\lambda} \cdot b^{2\lambda+1}}{\sum\limits_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{n+1}{2}} (-1)^{\lambda} \cdot \mathfrak{S}_{n-2\lambda+1} \cdot b^{2\lambda}}.$$

Utvecklingen af de i (43) förekommande factoriellerna kan ock verkställas på ett annat sätt, hvarigenom resultater erhållas, hvilka — ehuru måhända mindre användbara för numerisk kalkyl till följd af sin vidlyftighet — dock ej torde sakna intresse.

Man kan nemligen sätta, om n är jemnt,

$$(49) \quad \Pi_n(a-n+bi) = (a+bi)^{n+1} - s_1(a+bi)^n + s_2(a+bi)^{n-1} - \cdots + s_{n-2}(a+bi)^3 - s_{n-1}(a+bi)^2 + s_n(a+bi),$$ [1]

eller, om parentheserna i det sednare membrum bortskaffas, och resultatet ordnas efter de tilltagande digniteterna af bi (vi beteckna, som vanligt, binomial-coëfficienterna med n_1, n_2, n_3, etc.),

(50) $\Pi_n(a-n+bi) =$

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
= \quad a^{n+1} & +(n+1)_1\, a^n & bi + (n+1)_2 a^{n-1} & (bi)^2 + \cdots \; +(n+1)_n a & (bi)^n + (n+1)_{n+1}(bi)^{n+1} \\
- s_1 a^n & - n_1 \; s_1 a^{n-1} & - \; n_2 \; s_1 a^{n-2} & \cdots\cdots - \; n_n s_1 & \\
+ s_2 a^{n-1} & +(n-1)_1 s_2 a^{n-2} & + (n-1)_2 s_2 a^{n-3} & \cdots\cdots & \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \\
- s_{n-1} a^2 & - \; 2_1 \; s_{n-1} a & - \; 2_2 \; s^{n-1} & & \\
+ s_n a & + \; 1_1 \; s_n & & &
\end{array}$$

---

[1] Betydelsen af s_1, s_2, s_3, .. s_n är naturligtvis här densamma som i §§ 2—5.

$$= \Pi_n(a-n) + bi. \mathop{S}_{\mu=0}^{\mu=n} (-1)^{\mu} (\mu+1)_1 s_{n-\mu} a^{\mu} + (bi)^2 \mathop{S}_{\mu=1}^{\mu=n} (-1)^{\mu} (\mu+1)_2 s_{n-\mu} a^{\mu-1} + \cdots +$$

$$+ (bi)^{n-1} \mathop{S}_{\mu=n-2}^{\mu=n} (-1)^{\mu} (\mu+1)_{n-1} s_{n-\mu} a^{\mu-n+2} + (bi)^n \mathop{S}_{\mu=n-1}^{\mu=n} (-1)^{\mu} (\mu+1)_n s_{n-\mu} a^{\mu-n+1} +$$

$$+ (bi)^{n+1} \mathop{S}_{\mu=n}^{\mu=n} (-1)^{\mu} (\mu+1)_{n+1} s_{n-\mu} a^{\mu-n},$$

eller kortare:

$$(51)\quad \Pi_n(a-n+bi) = \Pi_n(a-n) + \mathop{S}_{1} bi + \mathop{S}_{2} (bi)^2 + \cdots + \mathop{S}_{n-1} (bi)^{n-1} + \mathop{S}_{n} (bi)^n + \mathop{S}_{n+1} (bi)^{n+1},$$

då nemligen med $\mathop{S}_{r}$ förstås $\mathop{S}_{\mu=r-1}^{\mu=n} (-1)^{\mu} (\mu+1)_r s_{n-\mu} a^{\mu-r+1}$.

På samma sätt erhålles:

$$(52)\quad \Pi_n(a-n-bi) = \Pi_n(a-n) - \mathop{S}_{1} bi + \mathop{S}_{2} (bi)^2 - \cdots - \mathop{S}_{n-1} (bi)^{n-1} + \mathop{S}_{p} (bi)^n - \mathop{S}_{n+1} (bi)^{n+1}$$

och således

$$\operatorname{Tg} \mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{a-n}\right)} = \frac{1}{i} \cdot \frac{\mathop{S}_{1} bi + \mathop{S}_{3} (bi)^3 + \mathop{S}_{5} (bi)^5 + \cdots + \mathop{S}_{n-3} (bi)^{n-3} + \mathop{S}_{n-1} (bi)^{n-1} + \mathop{S}_{n+1} (bi)^{n+1}}{\Pi_n(a-n) + \mathop{S}_{2} (bi)^2 + \mathop{S}_{4} (bi)^4 + \cdots + \mathop{S}_{n-4} (bi)^{n-4} + \mathop{S}_{n-2} (bi)^{n-2} + \mathop{S}_{n} (bi)^n} =$$

$$(53)\quad = \frac{\mathop{S}_{1} b - \mathop{S}_{3} b^3 + \mathop{S}_{5} b^5 - \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}} \mathop{S}_{n-3} b^{n-3} + (-1)^{\frac{n}{2}-1} \mathop{S}_{n-1} b^{n-1} + (-1)^{\frac{n}{2}} \mathop{S}_{n+1} b^{n+1}}{\Pi_n(a-n) - \mathop{S}_{2} b^2 + \mathop{S}_{4} b^4 - \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}} \mathop{S}_{n-4} b^{n-4} + (-1)^{\frac{n}{2}-1} \mathop{S}_{n-2} b^{n-2} + (-1)^{\frac{n}{2}} \mathop{S}_{n} b^n} =$$

$$= \frac{\mathop{S}_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{n}{2}} (-1)^{\lambda} \mathop{S}_{2\lambda+1} b^{2\lambda+1}}{\Pi_n(a-n) + \mathop{S}_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{n}{2}} (-1)^{\lambda} \mathop{S}_{2\lambda} b^{2\lambda}} = \frac{\mathop{S}_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{n}{2}} (-1)^{\lambda} \left(\mathop{S}_{\mu=2\lambda}^{\mu=n} (-1)^{\mu} (\mu+1)_{2\lambda+1} s_{n-\mu} a^{\mu-2\lambda} \right) b^{2\lambda+1}}{\Pi_n(a-n) + \mathop{S}_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{n}{2}} (-1)^{\lambda} \left(\mathop{S}_{\mu=2\lambda-1}^{\mu=n} (-1)^{\mu} (\mu+1)_{2\lambda} s_{n-\mu} a^{\mu-2\lambda+1} \right) b^{2\lambda}}$$

Är deremot n udda, så blir

$$(54)\quad \Pi_n(a-n+bi) = (a+bi)^{n+1} - s_1(a+bi)^n + s_2(a+bi)^{n-1} - \cdots - s_{n-2}(a+bi)^3 + s_{n-1}(a+bi)^2 -$$

$$- s_n(a+bi) =$$

$= a^{n+1}$	$+(n+1)_1 a^n$	$bi + (n+1)_2 a^{n-1}$	$(bi)^2 + \cdots + (n+1)_n a$	$(bi)^n + (n+1)_{n+1} (bi)^{n+1}$
$- s_1 a^n$	$- n_1 s_1 a^{n-1}$	$- n_2 s_1 a^{n-2}$	$\cdots\cdots - n_n s_1$	
$+ s_2 a^{n-1}$	$+(n-1)_1 s_2 a^{n-2}$	$+(n-1)_2 s_2 a^{n-3}$	$\cdots\cdots$	
$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	
$+ s_{n-1} a^2$	$+ 2_1 s_{n-1} a$	$+ 2_2 s_{n-1}$		
$- s_n a$	$- 1_1 s_n$			

$$= \Pi_n(a-n) + bi \overset{\mu=n}{\underset{\mu=0}{\mathbf{S}}} (-1)^{\mu+1}.(\mu+1)_1 s_{n-\mu} a^{\mu} + (bi)^2 \overset{\mu=n}{\underset{\mu=1}{\mathbf{S}}} (-1)^{\mu+1}.(\mu+1)_2 s_{n-\mu} a^{\mu-1} + \cdots +$$

$$+ (bi)^{n-1}. \overset{\mu=n}{\underset{\mu=n-2}{\mathbf{S}}} (-1)^{\mu+1}(\mu+1)_{n-1} s_{n-\mu} a^{\mu-n+2} + (bi)^n \overset{\mu=n}{\underset{\mu=n-1}{\mathbf{S}}} (-1)^{\mu+1}(\mu+1)_n s_{n-\mu} a^{\mu-n+1} +$$

$$+ (bi)^{n+1} \overset{\mu=n}{\underset{\mu=n}{\mathbf{S}}} (-1)^{\mu+1}(\mu+1)_{n+1} s_{n-\mu} a^{\mu-n} =$$

$$= \Pi_n(a-n) + \underset{1}{S}\, bi + \underset{2}{S}(bi)^2 + \cdots\cdots + \underset{n-1}{S}(bi)^{n-1} - \underset{n}{S}(bi)^n + \underset{n+1}{S}(bi)^{n+1},$$

då nemligen här med $\underset{r}{S}$ förstås $\overset{\mu=n}{\underset{\mu=r-1}{\mathbf{S}}} (-1)^{\mu+1}(\mu+1)_r s_{n-\mu} a^{\mu-r+1}$.

Likaså erhålles:

(55) $\Pi_n(a-n-bi) = \Pi_n(a-n) - \underset{1}{S}\, bi + \underset{2}{S}(bi)^2 - \cdots + \underset{n-1}{S}(bi)^{n-1} - \underset{n}{S}(bi)^n + \underset{n+1}{S}(bi)^{n+1}$;

och slutligen:

$$\mathrm{Tg}\,\mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{a-n}\right)} = \frac{1}{i}\cdot \frac{\underset{1}{S}\, bi + \underset{3}{S}(bi)^3 + \underset{5}{S}(bi)^5 + \cdots + \underset{n-4}{S}(bi)^{n-4} + \underset{n-2}{S}(bi)^{n-2} + \underset{n}{S}(bi)^n}{\Pi_n(a-n) + \underset{2}{S}(bi)^2 + \underset{4}{S}(bi)^4 + \cdots + \underset{n-3}{S}(bi)^{n-3} + \underset{n-1}{S}(bi)^{n-1} + \underset{n+1}{S}(bi)^{n+1}} =$$

$$(56)\quad = \frac{\underset{1}{S}b - \underset{3}{S}b^3 + \underset{5}{S}b^5 - \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\underset{n-4}{S}b^{n-4} + (-1)^{\frac{n+1}{2}}\underset{n-2}{S}b^{n-2} + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\underset{n}{S}b^n}{\Pi_n(a-n) - \underset{2}{S}b^2 + \underset{4}{S}b^4 \cdots + (-1)^{\frac{n+1}{2}}\underset{n-3}{S}b^{n-3} + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\underset{n-1}{S}b^{n-1} + (-1)^{\frac{n+1}{2}}\underset{n+1}{S}b^{n+1}} =$$

$$= \frac{\overset{\lambda=\frac{n-1}{2}}{\underset{\lambda=0}{\mathbf{S}}} (-1)^{\lambda} \underset{2\lambda+1}{S}\, b^{2\lambda+1}}{\Pi_n(a-n) + \overset{\lambda=\frac{n+1}{2}}{\underset{\lambda=1}{\mathbf{S}}} (-1)^{\lambda} \underset{2\lambda}{S}\, b^{2\lambda}} = \frac{\overset{\lambda=\frac{n-1}{2}}{\underset{\lambda=0}{\mathbf{S}}} (-1)^{\lambda}\left(\overset{\mu=n}{\underset{\mu=2\lambda}{\mathbf{S}}} (-1)^{\mu+1}(\mu+1)_{2\lambda+1} s_{n-\mu} a^{\mu-2\lambda}\right) b^{2\lambda+1}}{\Pi_n(a-n) + \overset{\lambda=\frac{n+1}{2}}{\underset{\lambda=1}{\mathbf{S}}} (-1)^{\lambda}\left(\overset{\mu=n}{\underset{\mu=2\lambda-1}{\mathbf{S}}} (-1)^{\mu+1}.(\mu+1)_{2\lambda} s_{n-\mu} a^{\mu-2\lambda+1}\right) b^{2\lambda}}$$

§ 8.

För värden på b, numeriskt $\leqq a$, gälla följande utvecklingar:

$$\mathrm{Arctg}\,\frac{b}{a} = \frac{b}{a} - \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{b}{a}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{b}{a}\right)^7 + \cdots\cdots$$

$$\mathrm{Arctg}\,\frac{b}{2a} = \frac{b}{2a} - \frac{1}{3}\left(\frac{b}{2a}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{b}{2a}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{b}{2a}\right)^7 + \cdots\cdots$$

$$\operatorname{Arctg}\frac{b}{3a}=\frac{b}{3a}-\frac{1}{3}\left(\frac{b}{3a}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{b}{3a}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{b}{3a}\right)^7+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\operatorname{Arctg}\frac{b}{na}=\frac{b}{na}-\frac{1}{3}\left(\frac{b}{na}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{b}{na}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{b}{na}\right)^7+\cdots\cdots$$

Genom addering af de vertikala raderna erhålles:

$$(57)\qquad \mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{na}\right)}=b.\overset{\lambda=n}{\underset{\lambda=1}{\mathbf{S}}}\left(\frac{1}{\lambda a}\right)-\frac{b^3}{3}.\overset{\lambda=n}{\underset{\lambda=1}{\mathbf{S}}}\left(\frac{1}{\lambda a}\right)^3+\frac{b^5}{5}.\overset{\lambda=n}{\underset{\lambda=1}{\mathbf{S}}}\left(\frac{1}{\lambda a}\right)^5-\frac{b^7}{7}.\overset{\lambda=n}{\underset{\lambda=1}{\mathbf{S}}}\left(\frac{1}{\lambda a}\right)^7+\cdots\cdots$$

Låter man nu i den för alla positiva μ-valörer städse gällande formeln

$$(58)\qquad \int_0^\infty e^{-\mu x}\,dx=\frac{1}{\mu}$$

μ successivt betyda a, $2a$, $3a$, ... na, och summerar resultaterna; så finnes, med vilkor att a är positivt:

$$(59)\qquad \int_0^\infty \frac{1-e^{-nax}}{e^{ax}-1}\,dx=\overset{\lambda=n}{\underset{\lambda=1}{\mathbf{S}}}\left(\frac{1}{\lambda a}\right)$$

Differentieras (58) m gånger i afseende på μ, så erhålles den bekanta formeln:

$$(60)\qquad \int_0^\infty \frac{x^m e^{-\mu x}}{\Gamma(m+1)}dx=\frac{1}{\mu^{m+1}}.$$

Och om man med denna förfar på samma sätt som näst ofvanför med (58), så erhålles:

$$(61)\qquad \int_0^\infty \frac{x^m}{\Gamma(m+1)}\cdot\frac{1-e^{-nax}}{e^{ax}-1}\,dx=\overset{\lambda=n}{\underset{\lambda=1}{\mathbf{S}}}\left(\frac{1}{\lambda a}\right)^{m+1},$$

der med m förstås hvilket helt tal som helst.

Insättas nu dessa integraler i (57), så blir resultatet:

$$(62)\qquad \mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{na}\right)}=b\int_0^\infty\frac{1-e^{-nax}}{e^{ax}-1}\,dx-\frac{b^3}{3}\int_0^\infty\frac{x^2}{\Gamma(3)}\cdot\frac{1-e^{-nax}}{e^{ax}-1}\,dx+\frac{b^5}{5}\int_0^\infty\frac{x^4}{\Gamma(5)}\cdot\frac{1-e^{-nax}}{e^{ax}-1}\,dx-\cdots=$$

$$=\int_0^\infty\frac{1-e^{-nax}}{e^{ax}-1}\cdot\left(bx-\frac{b^3x^3}{\Gamma(4)}+\frac{b^5x^5}{\Gamma(6)}-\cdots\right)\cdot\frac{dx}{x},$$

hvaraf slutligen erhålles:

$$(\mathrm{I})\qquad \int_0^\infty\frac{1-e^{-nax}}{e^{ax}-1}\cdot\frac{e^{bxi}-e^{-bxi}}{2i}\cdot\frac{dx}{x}=\mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{na}\right)},$$

eller

$$(\mathrm{I}')\qquad \int_0^\infty \frac{1-e^{-nax}}{e^{ax}-1}\cdot\frac{\operatorname{Sin} bx}{x}\,dx = \mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{na}\right)},$$

hvilka båda formler således gälla under den förutsättning, att a är $> o$, åtminstone om b^2 är $\leqq a^2$.

Insätter man i dessa formler 1 i stället för a, och $\frac{b}{a}$ för b, så erhålles

$$(\mathrm{II})\qquad \left.\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{1-e^{-nx}}{e^x-1}\cdot\frac{e^{\frac{bxi}{a}}-e^{-\frac{bxi}{a}}}{2i}\,\frac{dx}{x}\\ =&\int_0^\infty \frac{1-e^{-nx}}{e^x-1}\cdot\frac{\operatorname{Sin}\left(\frac{bx}{a}\right)}{x}\,dx\end{aligned}\right\} = \mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{na}\right)},\ \text{åtminstone för } b^2\leqq a^2.$$

Använda vi deremot till de harmoniska seriernas summering integralerna:

$$\left.\begin{aligned}&(63)\qquad \int_0^1 x^{\mu-1}dx=\frac{1}{\mu},\\ &(64)\qquad \int_0^1 \frac{x^{\mu-1}.(lx)^m}{\Gamma(m+1)}dx = (-1)^m.\frac{1}{\mu^{m+1}}\end{aligned}\right\}(\mu > o),$$

af hvilka den sednare erhålles ur den förra på samma sätt som (60) ur (58), så blifva våra resultater:

$$(\mathrm{III})\qquad \left.\begin{aligned}&\int_0^1 x^{a-1}.\frac{1-x^{na}}{1-x^a}.\frac{e^{bi.lx}-e^{-bi.lx}}{2i}.\frac{dx}{lx}=\\ &\int_0^1 x^{a-1}.\frac{1-x^{na}}{1-x^a}.\frac{x^{bi}-x^{-bi}}{2i}.\frac{dx}{lx}=\\ &\int_0^1 x^{a-1}.\frac{1-x^{na}}{1-x^a}.\frac{\operatorname{Sin} b.lx}{lx}.\,dx=\end{aligned}\right\} = \mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{na}\right)} (a > o,\ b^2\leqq a^2),$$

och

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}.\frac{e^{\frac{bi.lx}{a}}-e^{-\frac{bi.lx}{a}}}{2i}.\frac{dx}{lx}=\\ &\int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}.\frac{x^{\frac{bi}{a}}-x^{-\frac{bi}{a}}}{2i}.\frac{dx}{lx}=\\ &\int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}.\frac{\operatorname{Sin}\left(\frac{b.lx}{a}\right)}{lx}.\,dx=\end{aligned}\right\} = \mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{na}\right)} (b^2\leqq a^2).$$

§ 9.

Likaså gälla, under den förutsättningen, att b icke är numeriskt större än någon af qvantiteterna a, $a-1$, $a-2$, ... $a-n$, följande utvecklingar:

$$\text{Arctg}\,\frac{b}{a} = \frac{b}{a} - \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{b}{a}\right)^5 - \cdots\cdots$$

$$\text{Arctg}\,\frac{b}{a-1} = \frac{b}{a-1} - \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a-1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{b}{a-1}\right)^5 - \cdots\cdots$$

$$\text{Arctg}\,\frac{b}{a-2} = \frac{b}{a-2} - \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a-2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{b}{a-2}\right)^5 - \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{Arctg}\,\frac{b}{a-n} = \frac{b}{a-n} - \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a-n}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{b}{a-n}\right)^5 - \cdots\cdots$$

Således är ock

$$\mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{a-n}\right)} = b.\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}\left(\frac{1}{a-\lambda}\right) - \frac{b^3}{3}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}\left(\frac{1}{a-\lambda}\right)^3 + \frac{b^5}{5}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}\left(\frac{1}{a-\lambda}\right)^5 - \cdots\cdots \tag{65}$$

Och genom ett fullkomligt analogt förfarande med det, vi i föregående paragr. användt — i det man nemligen i (58) och (60) successivt insätter a, $a-1$, $a-2$, ... $a-n$ i stället för μ —, erhållas följande resultater:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty e^{-ax}.\,\frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x}.\,\frac{e^{bxi}-e^{-bxi}}{2i}.\,\frac{dx}{x}\\ =&\int_0^\infty e^{-ax}.\,\frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x}.\,\frac{\text{Sin}\,bx}{x}.\,dx\end{aligned}\right\} = \mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{a-n}\right)}\left(\begin{matrix}a>n,\\ b^2\leqq(a-n)^2\end{matrix}\right) \tag{V}$$

Skrifves deremot (65) sålunda:

$$\mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{a-n}\right)} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}\left(\frac{b}{a-\lambda}\right) - \frac{1}{3}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}\left(\frac{b}{a-\lambda}\right)^3 + \frac{1}{5}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}\left(\frac{b}{a-\lambda}\right)^5 + \cdots\cdots \tag{66}$$

och om man i (58) och (60) successivt insätter $\frac{a}{b}$, $\frac{a-1}{b}$, $\frac{a-2}{b}$, ... $\frac{a-n}{b}$ i stället för μ, så får man på samma sätt som förut:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty e^{-\frac{ax}{b}}.\,\frac{1-e^{(n+1)\frac{x}{b}}}{1-e^{\frac{x}{b}}}.\,\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}.\,\frac{dx}{x}\\ =&\int_0^\infty e^{-\frac{ax}{b}}.\,\frac{1-e^{(n+1)\frac{x}{b}}}{1-e^{\frac{x}{b}}}.\,\frac{\text{Sin}\,x}{x}.\,dx\end{aligned}\right\} = \mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{a-n}\right)}\left[\begin{matrix}b^2\leqq(a-n)^2\\ \text{och}\\ \text{antingen } b>o,\ a>n\\ \text{eller } b \text{ och } a \text{ negativa.}\end{matrix}\right] \tag{VI}$$

Utan svårighet inses nu ock, huru man genom användning af (63) och (64) erhåller:

(VII)
$$\left.\begin{aligned}&\int_0^1 x^{a-1}.\frac{x^{n+1}-1}{x^{n+1}-x^n}.\frac{e^{bi.lx}-e^{-bi.lx}}{2i}.\frac{dx}{lx}\\ =&\int_0^1 x^{a-1}.\frac{x^{n+1}-1}{x^{n+1}-x^n}.\frac{x^{bi}-x^{-bi}}{2i}.\frac{dx}{lx}\\ =&\int_0^1 x^{a-1}.\frac{x^{n+1}-1}{x^{n+1}-x^n}.\frac{\text{Sin }(b.lx)}{lx}.dx\end{aligned}\right\}=\mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{a-n}\right)}\quad\left[\begin{matrix}a>n\\ b^2 \gtreqless (a-n)^2\end{matrix}\right]$$

(VIII)
$$\left.\begin{aligned}&\int_0^1 x^{\frac{a}{b}-1}.\frac{x^{\frac{n+1}{b}}-1}{x^{\frac{n+1}{b}}-x^{\frac{n}{b}}}.\frac{e^{i.lx}-e^{-i.lx}}{2i}.\frac{dx}{lx}\\ =&\int_0^1 x^{\frac{a}{b}-1}.\frac{x^{\frac{n+1}{b}}-1}{x^{\frac{n+1}{b}}-x^{\frac{n}{b}}}.\frac{x^{i}-x^{-i}}{2i}.\frac{dx}{lx}\\ =&\int_0^1 x^{\frac{a}{b}-1}.\frac{x^{\frac{n+1}{b}}-1}{x^{\frac{n+1}{b}}-x^{\frac{n}{b}}}.\frac{\text{Sin}(lx)}{lx}.dx\end{aligned}\right\}=\mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{a-n}\right)}\left[\begin{matrix}b^2 \gtreqless (a-n)^2\\ \text{och}\\ \text{antingen } a>n,\ b>o\\ \text{eller } a \text{ och } b \text{ negativa.}\end{matrix}\right]$$

§ 10.

Integralerna

(67)
$$\int_0^\infty e^{-px}.\text{ Sin } qx.\ dx=\frac{q}{p^2+q^2}$$

(68)
$$\int_0^\infty e^{-px}.\text{ Cos } qx.\ dx=\frac{p}{p^2+q^2}$$

gälla, såsom bekant är, för hvilka positiva p-valörer och hvilka reella q-valörer som helst.

Genom den förras multiplicering med dp och integrering mellan gränserna o och p, erhålles den bekanta:

(69)
$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-px}}{x}.\text{ Sin } qx.\ dx=\text{Arctg }\frac{p}{q},\ (p>o)$$

gällande för både positiva och negativa q-valörer, men ej för $q=o$.

Låter man i denna formel q successivt betyda $a,\ 2a,\ 3a\ldots.\ na,$ och p vara $=b$, samt adderar de på detta sätt erhållna likheter, så blir resultatet:

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-bx}}{x}(\text{Sin } ax + \text{Sin } 2ax + \text{Sin } 3ax + \cdots\cdots + \text{Sin } nax).\ dx = {}^{1)}$$

(IX)
$$= \int_0^\infty \frac{1-e^{-bx}}{x} \cdot \frac{\text{Sin}\frac{(n+1)ax}{2} \cdot \text{Sin}\frac{nax}{2}}{\text{Sin}\frac{ax}{2}} \cdot dx = \mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{na}\right)},$$

gällande för hvarje $b > o$, blott a icke är $= o$.

På alldeles samma sätt erhållas genom följande substitutioner de resp. integralerna:

1) $p=b;\ q=a,\ a-1,\ a-2, \ldots. a-n$, (ingen $= o$):

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-bx}}{x}[\text{Sin } ax + \text{Sin }(a-1)x + \text{Sin }(a-2)x + \cdots\cdot + \text{Sin }(a-n)x]\ dx =$$

(X)
$$= \int_0^\infty \frac{1-e^{-bx}}{x} \cdot \frac{\text{Sin}\frac{(2a-n)x}{2} \cdot \text{Sin}\frac{(n+1)x}{2}}{\text{Sin}\frac{x}{2}} \cdot dx = \mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{a-n}\right)} \quad (b > o).$$

2) $p=1;\ q=\frac{a}{b},\ \frac{a-1}{b},\ \frac{a-2}{b}, \ldots\ldots \frac{a-n}{b}$, (ingen $= o$):

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-x}}{x}\left(\text{Sin}\frac{ax}{b} + \text{Sin}\frac{(a-1)x}{b} + \text{Sin}\frac{(a-2)x}{b} + \cdots\cdots + \text{Sin}\frac{(a-n)x}{b}\right) \cdot dx =$$

(XI)
$$= \int_0^\infty \frac{1-e^{-x}}{x} \cdot \frac{\text{Sin}\frac{(2a-n)x}{2b} \cdot \text{Sin}\frac{(n-1)x}{2b}}{\text{Sin}\frac{x}{2b}} \cdot dx = \mathfrak{A}_{\left(\frac{b}{a-n}\right)}.$$

3) $q=a;\ p=b,\ 2b,\ 3b \ldots. nb$:

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin } ax}{x}\left[n - \frac{1-e^{-nbx}}{e^{bx}-1}\right] dx = \pm\frac{n\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{1-e^{-nbx}}{e^{bx}-1} \cdot \frac{\text{Sin } ax}{x} \cdot dx = \mathfrak{A}_{\left(\frac{nb}{a}\right)};$$

(alltefterson a är $>$ eller $<$ o)

således efter ett par öfverflyttningar:

(XII)
$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-nbx}}{e^{bx}-1} \cdot \frac{\text{Sin } ax}{x} \cdot dx = \pm\frac{n\pi}{2} - \mathfrak{A}_{\left(\frac{nb}{a}\right)} = \mathfrak{A}_{\left(\frac{a}{nb}\right)} \quad (b > o).$$

Jemför den härmed fullkomligt identiska (I), som dock blifvit deducerad under förbehåll, att $b^2 \gtreqless a^2$.

---

1) Se t. ex. Eytelwein, Grundlehren der höheren Analysis, B. 1, pag. 451.

4) $q = a;\ p = b,\ b-1,\ b-2, \ldots\ldots\ldots, b-n$:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin} ax}{x} \cdot \left[n + 1 - e^{-bx} \frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x}\right] dx = \pm \frac{(n+1)\pi}{2} - \int_0^\infty e^{-bx} \frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x} \frac{\operatorname{Sin} ax}{x} \cdot dx = \mathfrak{A}_{\left(\frac{b-n}{a}\right)}.$$

(alltefter som a är $>$ eller $< o$)

och således

$$\text{(XIII)} \quad \int_0^\infty e^{-bx} \frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x} \cdot \frac{\operatorname{Sin} ax}{x} \cdot dx = \pm \frac{(n+1)\pi}{2} - \mathfrak{A}_{\left(\frac{b-n}{a}\right)} = \mathfrak{A}_{\left(\frac{a}{b-n}\right)}\ (b > n).$$

5) $q = 1;\ p = \frac{b}{a}, \frac{b-1}{a}, \frac{b-2}{a}, \ldots\ldots\ldots \frac{b-n}{a}$:

$$\text{(XIV)} \quad \int_0^\infty e^{-\frac{bx}{a}} \cdot \frac{1-e^{(n+1)\frac{x}{a}}}{1-e^{\frac{x}{a}}} \cdot \frac{\operatorname{Sin} x}{x} \cdot dx = \mathfrak{A}_{\left(\frac{a}{b-n}\right)} \left[\begin{matrix} b > n,\ a > o \\ \text{eller} \\ a \text{ och } b \text{ negativa} \end{matrix}\right].$$

Jemför (V) och (VI) med dessa (XIII) och (XIV).

Integreras deremot (68), multiplicerad med dq, mellan gränserna o och q, så erhålles:

$$\text{(70)} \quad \int_0^\infty e^{-px} \cdot \frac{\operatorname{Sin} qx}{x} \cdot dx = \operatorname{Arctg} \frac{q}{p} \cdot \ (p > o).$$

Substituerar man här a för p, och i stället för q successivt b, $2b$, $3b, \ldots\ldots nb$, och adderar, så får man:

$$\int_0^\infty e^{-ax} (\operatorname{Sin} bx + \operatorname{Sin} 2bx + \operatorname{Sin} 3bx + \cdots\cdots + \operatorname{Sin} nbx) \frac{dx}{x} =$$

$$\text{(XV)} \quad = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\operatorname{Sin} \frac{(n+1)bx}{2} \cdot \operatorname{Sin} \frac{nbx}{2}}{x.\ \operatorname{Sin} \frac{bx}{2}} \cdot dx = \mathfrak{A}_{\left(\frac{nb}{a}\right)}\ (a > o).$$

Substitutionen

$$p = a;\ q = b,\ b-1,\ b-2, \ldots\ldots b-n$$

gifver

$$\int_0^\infty e^{-ax} [\operatorname{Sin} bx + \operatorname{Sin} (b-1)x + \operatorname{Sin} (b-2)x + \cdots\cdots\cdots + \operatorname{Sin} (b-n)x] \frac{dx}{x} =$$

$$\text{(XVI)} \quad = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\operatorname{Sin} \frac{(2b-n)x}{2} \cdot \operatorname{Sin} \frac{(n+1)x}{2}}{x . \operatorname{Sin} \frac{x}{2}} dx = \mathfrak{A}_{\left(\frac{b-n}{a}\right)}\ (a > o)$$

Likaså:

$$p=1;\ q=\frac{b}{a},\ \frac{b-1}{a},\ \frac{b-2}{a},\ldots\ldots\frac{b-n}{a}:$$

(XVII) $$\int_0^\infty e^{-x}\frac{\text{Sin}\frac{(2b-n)x}{2a}\cdot\text{Sin}\frac{(n+1)x}{2a}}{x.\ \text{Sin}\frac{x}{2a}}dx=\mathfrak{A}_{\left(\frac{b-n}{a}\right)}.$$

Äfven kan man, genom substitutionerna:

$$p=b,\ 2b,\ 3b,\ldots.nb;\ q=a,$$
$$p=b,\ b-1,\ b-2,\ldots.b-n;\ q=a,$$
$$p=\frac{b}{a},\ \frac{b-1}{a},\ \frac{b-2}{a},\ldots..\frac{b-n}{a};\ q=1,$$

ånyo erhålla formlerna (XII), (XIII) och (XIV).

§ II.

Sätter man i (67)

$$1)\ p=1;\ q=\frac{na}{y},$$

så blir

$$\int_0^\infty e^{-x}\ \text{Sin}\frac{nax}{y}\cdot dx=\frac{\frac{na}{y}}{1+\left(\frac{na}{y}\right)^2}=\frac{\frac{y}{na}}{1+\left(\frac{y}{na}\right)^2},$$

eller

$$\int_0^\infty\frac{e^{-x}}{y}\cdot\text{Sin}\frac{nax}{y}\cdot dx=\frac{\frac{1}{na}}{1+\left(\frac{y}{na}\right)^2};$$

hvaraf

$$\int_b^\infty\int_0^\infty\frac{e^{-x}}{y}\cdot\text{Sin}\frac{nax}{y}\cdot dx.\,dy=\pm\frac{\pi}{2}-\text{Arctg}\frac{b}{na}=\text{Arctg}\frac{na}{b}\ (b>o).$$

Låter man här n vara successivt $=1,\ 2,\ 3,\ldots n$, och adderar de sålunda erhållna likheterna, så blir

(XVIII) $$\int_b^\infty\int_0^\infty e^{-x}.\ \frac{\text{Sin}\frac{(n+1)ax}{2y}\cdot\text{Sin}\frac{nax}{2y}}{y.\ \text{Sin}\frac{ax}{2y}}dx.\,dy=\mathfrak{A}_{\left(\frac{na}{b}\right)}\quad(b>o).$$

Genom ett analogt förfarande kunna förmedelst följande substitutioner de motsvarande integralerna erhållas.

2) $p=1;\ q=\frac{a-n}{y}$:

$$\int_0^\infty e^{-x}.\ \mathrm{Sin}\,\frac{(a-n)x}{y}.\ dx = \frac{\frac{a-n}{y}}{1+\left(\frac{a-n}{y}\right)^2} = \frac{\frac{y}{a-n}}{1+\left(\frac{y}{a-n}\right)^2}.$$

$$\int_b^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{y}.\ \mathrm{Sin}\,\frac{(a-n)x}{y}.\ dx.\,dy = \pm\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctg}\,\frac{b}{a-n} = \mathrm{Arctg}\,\frac{a-n}{b}\quad (b>o);$$

(XIX)
$$\int_b^\infty\int_0^\infty e^{-x}.\ \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{(2a-n)x}{2y}.\ \mathrm{Sin}\,\frac{(n+1)x}{2y}}{y.\ \mathrm{Sin}\,\frac{x}{2y}}\,dx.\,dy = \mathfrak{A}_{\left(\frac{a-n}{b}\right)}.$$

3) $p=ny;\ q=a$:

$$\int_0^\infty e^{-nxy}.\ \mathrm{Sin}\,ax\,dx = \frac{a}{a^2+(ny)^2} = \frac{\frac{1}{a}}{1+\left(\frac{ny}{a}\right)^2}.$$

$$\int_0^b\int_0^\infty ne^{-nxy}.\ \mathrm{Sin}\,ax\,dx\,dy = \mathrm{Arctg}\,\frac{nb}{a}\ \left[\begin{matrix}a \text{ icke} = o\\ b>o\end{matrix}\right].$$

(XX)
$$\int_0^b\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin}\,ax}{e^{xy}}.\ \frac{ne^{-(n+1)xy}-(n+1)e^{-nxy}+1}{(e^{-xy}-1)^2}\,dx.\,dy = \mathfrak{A}_{\left(\frac{nb}{a}\right)}^{1)}\ \left[\begin{matrix}a \text{ icke} = o,\\ b>o\end{matrix}\right].$$

4) $p=\frac{ny}{a};\ q=1$:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{nxy}{a}}\,\mathrm{Sin}\,x\,dx = \frac{1}{1+\left(\frac{ny}{a}\right)^2}.$$

$$\int_0^b\int_0^\infty \frac{ne^{-\frac{nxy}{a}}}{a}.\ \mathrm{Sin}\,x\,dx\,dy = \mathrm{Arctg}\,\frac{nb}{a}\ \left(\frac{b}{a}\text{ positiv}\right).$$

(XXI)
$$\int_0^b\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin}\,x}{ae^{\frac{xy}{a}}}.\ \frac{ne^{-\frac{(n+1)xy}{a}}-(n+1)e^{-\frac{nxy}{a}}+1}{\left(e^{-\frac{xy}{a}}-1\right)^2}\,dx\,dy = \mathfrak{A}_{\left(\frac{nb}{a}\right)}\ \left(\frac{b}{a}\text{ positiv}\right).$$

---

[1] Angående den formel, efter hvilken denna summering blifvit gjord, och af hvilken vi äfven här nedan komma att flere gånger göra bruk, se Eytelwein, Grundlehren der höheren Analysis, B. 1, pag. 432.

5) $p=n;\ q=\frac{a}{y}$:

$$\int_0^\infty e^{-nx}\cdot \operatorname{Sin}\frac{ax}{y}\cdot dx=\frac{\frac{a}{y}}{n^2+\left(\frac{a}{y}\right)^2}=\frac{\frac{y}{a}}{1+\left(\frac{ny}{a}\right)^2}.$$

$$\int_b^\infty\int_0^\infty\frac{ne^{-nx}}{y}\cdot \operatorname{Sin}\frac{ax}{y}\,dx\,dy=\pm\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctg}\frac{nb}{a}=\operatorname{Arctg}\frac{a}{nb}\quad (b>o).$$

(XXII) $$\int_b^\infty\int_0^\infty\frac{\operatorname{Sin}\frac{ax}{y}}{ye^x}\cdot\frac{ne^{-(n+1)x}-(n+1)e^{-nx}+1}{(e^{-x}-1)^2}\,dx\,dy=\mathfrak{A}_{\left(\frac{a}{nb}\right)}\quad (b>o).$$

6) $p=(b-n)y;\ q=a$:

$$\int_0^\infty e^{(n-b)xy}\cdot \operatorname{Sin} ax\,dx=\frac{a}{a^2+[(b-n)y]^2}=\frac{\frac{1}{a}}{1+\left[\frac{(b-n)y}{a}\right]^2}.$$

$$\int_0^1\int_0^\infty (b-n)e^{(n-b)xy}\cdot \operatorname{Sin} ax\,dx\,dy=\operatorname{Arctg}\frac{b-n}{a}\quad (b>n).$$

(XXIII) $$\int_0^1\int_0^\infty\frac{\operatorname{Sin} ax}{e^{bxy}}\left[b.\frac{e^{(n+1)xy}-1}{e^{xy}-1}-e^{xy}.\frac{ne^{(n+1)xy}-(n+1)e^{nxy}+1}{(e^{xy}-1)^2}\right]dx\,dy=\mathfrak{A}_{\left(\frac{b-n}{a}\right)}(b>n).$$

7) $p=b-n;\ q=\frac{a}{y}$:

$$\int_0^\infty e^{(n-b)x}\cdot \operatorname{Sin}\frac{ax}{y}\cdot dx=\frac{\frac{a}{y}}{(b-n)^2+\left(\frac{a}{y}\right)^2}=\frac{\frac{y}{a}}{1+\left[\frac{(b-n)y}{a}\right]^2}\quad (b>n).$$

$$\int_1^\infty\int_0^\infty\frac{(b-n)e^{(n-b)x}}{y}\cdot \operatorname{Sin}\frac{ax}{y}\cdot dx\,dy=\pm\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctg}\frac{b-n}{a}=\operatorname{Arctg}\frac{a}{b-n}.$$

(XXIV) $$\int_1^\infty\int_0^\infty\frac{\operatorname{Sin}\frac{ax}{y}}{ye^{bx}}\left[b\cdot\frac{e^{(n+1)x}-1}{e^x-1}-e^x\cdot\frac{ne^{(n+1)x}-(n+1)e^{nx}+1}{(e^x-1)^2}\right]dx\,dy=\mathfrak{A}_{\left(\frac{a}{b-n}\right)}(b>n).$$

8) $p=\frac{(b-n)y}{a};\ q=1$:

$$\int_0^\infty e^{\frac{(n-b)xy}{a}}\operatorname{Sin} x\,dx=\frac{1}{1+\left[\frac{(b-n)y}{a}\right]^2}.$$

$$\int_0^1\int_0^\infty \frac{b-n}{a} \cdot e^{\frac{(n-b)xy}{a}} . \operatorname{Sin} x\, dx\, dy = \operatorname{Arctg} \frac{b-n}{a} .$$

$$\text{(XXV)} \quad \int_0^1\int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin} x}{ae^{\frac{bxy}{a}}} \cdot \left[b . \frac{e^{(n+1)\frac{xy}{a}}-1}{e^{\frac{xy}{a}}-1} - e^{\frac{xy}{a}} . \frac{ne^{(n+1)\frac{xy}{a}}-(n+1)e^{\frac{nxy}{a}}+1}{\left(e^{\frac{xy}{a}}-1\right)^2} \right] dx\, dy = \mathfrak{A}_{\left(\frac{b-n}{a}\right)} .$$

$$\begin{bmatrix} b > n,\ a > o \\ \text{eller} \\ a \text{ och } b \text{ negativa} \end{bmatrix}$$

9) $p = na;\ q = y$:

$$\int_0^\infty e^{-nax} \operatorname{Sin} xy\, dx = \frac{y}{(na)^2+y^2} = \frac{\frac{y}{(na)^2}}{1+\left(\frac{y}{na}\right)^2} \quad (a > o).$$

$$\int_b^\infty\int_0^\infty \frac{na}{y} . e^{-nax} \operatorname{Sin} xy\, dx\, dy = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctg} \frac{b}{na} = \operatorname{Arctg} \frac{na}{b} \quad (b > o).$$

$$\text{(XXVI)} \quad \int_b^\infty\int_0^\infty \frac{a \operatorname{Sin} xy}{ye^{ax}} . \frac{ne^{-(n+1)ax}-(n+1)e^{-nax}+1}{(e^{-ax}-1)^2} dx\, dy = \mathfrak{A}_{\left(\frac{na}{b}\right)} \quad \left(\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} > o).$$

10) $p = n;\ q = \frac{y}{a}$:

$$\int_0^\infty e^{-nx} \operatorname{Sin} \frac{xy}{a}\, dx = \frac{\frac{y}{a}}{n^2+\left(\frac{y}{a}\right)^2} = \frac{\frac{y}{n^2 a}}{1+\left(\frac{y}{na}\right)^2} .$$

$$\int_b^\infty\int_0^\infty \frac{n}{y} e^{-nx} \operatorname{Sin} \frac{xy}{a}\, dx\, dy = \pm \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctg} \frac{b}{na} = \operatorname{Arctg} \frac{na}{b} \ (b > o).$$

$$\text{(XXVII)} \quad \int_b^\infty\int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin} \frac{xy}{a}}{ye^x} . \frac{ne^{-(n+1)x}-(n+1)e^{-nx}+1}{(e^{-x}-1)^2} dx\, dy = \mathfrak{A}_{\left(\frac{na}{b}\right)} \quad (b > o).$$

11) $p = \frac{na}{y};\ q = 1$:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{nax}{y}} \operatorname{Sin} x\, dx = \frac{1}{\left(\frac{na}{y}\right)^2+1} = \frac{\left(\frac{y}{na}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{na}\right)^2} .$$

$$\int_b^\infty\int_0^\infty \frac{na}{y^2}\cdot e^{-\frac{nax}{y}}\,.\,\mathrm{Sin}\,x\,dx\,dy = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctg}\,\frac{b}{na} = \mathrm{Arctg}\,\frac{na}{b}\ \left[\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right\} > o\Big].$$

$$\text{(XXVIII)}\ \int_b^\infty\int_0^\infty \frac{a\,\mathrm{Sin}\,x}{y^2 e^{\frac{ax}{y}}}\cdot\frac{ne^{-(n+1)\frac{ax}{y}} - (n+1)e^{-\frac{nax}{y}} + 1}{\left(e^{-\frac{ax}{y}} - 1\right)^2}\cdot dx\,dy = \mathfrak{A}_{\left(\frac{na}{b}\right)}\left[\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right\} > o\Big].$$

12) $p = a - n;\ q = y$:

$$\int_0^\infty e^{(n-a)x}.\ \mathrm{Sin}\,xy\,dx = \frac{y}{(a-n)^2 + y^2} = \frac{\frac{y}{(a-n)^2}}{1 + \left(\frac{y}{a-n}\right)^2}\ (a > n).$$

$$\int_b^\infty\int_0^\infty \frac{a-n}{y}\cdot e^{(n-a)x}.\ \mathrm{Sin}\,xy\,dx\,dy = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctg}\,\frac{b}{a-n} = \mathrm{Arctg}\,\frac{a-n}{b}\ (b > o).$$

$$\text{(XXIX)}\ \int_b^\infty\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin}\,xy}{ye^{ax}}\left[a\cdot\frac{e^{(n+1)x} - 1}{e^x - 1} - e^x\cdot\frac{ne^{(n+1)x} - (n+1)e^{nx} + 1}{(e^x - 1)^2}\right] dx\,dy = \mathfrak{A}_{\left(\frac{a-n}{b}\right)}\left[\begin{matrix}a > n\\b > o\end{matrix}\right].$$

13) $p = \frac{a-n}{y};\ q = 1$:

$$\int_0^\infty e^{\frac{(n-a)x}{y}}.\ \mathrm{Sin}\,x\,dx = \frac{1}{\left(\frac{a-n}{y}\right)^2 + 1} = \frac{\left(\frac{y}{a-n}\right)^2}{1 + \left(\frac{y}{a-n}\right)^2}.$$

$$\int_b^\infty\int_0^\infty \frac{a-n}{y^2}\cdot e^{\frac{(n-a)x}{y}}.\ \mathrm{Sin}\,x\,dx\,dy = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctg}\,\frac{b}{a-n} = \mathrm{Arctg}\,\frac{a-n}{b}\ \left[\begin{matrix}a > n\\b > o\end{matrix}\right].$$

$$\text{(XXX)}\ \int_b^\infty\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin}\,x}{y^2 e^{\frac{ax}{y}}}\left[a.\frac{e^{(n+1)\frac{x}{y}} - 1}{e^{\frac{x}{y}} - 1} - e^{\frac{x}{y}}.\frac{ne^{(n+1)\frac{x}{y}} - (n+1)e^{\frac{nx}{y}} + 1}{\left(e^{\frac{x}{y}} - 1\right)^2}\right] dx\,dy = \mathfrak{A}_{\left(\frac{a-n}{b}\right)}\left[\begin{matrix}a > n\\b > o\end{matrix}\right].$$

14) $p = a;\ q = ny$:

$$\int_0^\infty e^{-ax}.\ \mathrm{Sin}\,nxy\,dx = \frac{ny}{a^2 + (ny)^2} = \frac{\frac{ny}{a^2}}{1 + \left(\frac{ny}{a}\right)^2}\ (a > o).$$

$$\int_b^\infty\int_0^\infty \frac{a}{y}\cdot e^{-ax}.\ \mathrm{Sin}\,nxy\,dx\,dy = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctg}\frac{nb}{a} = \mathrm{Arctg}\frac{a}{nb}\ (b > o).$$

$$\text{(XXXI)}\qquad \int_b^\infty\int_0^\infty ae^{-ax}.\ \frac{\mathrm{Sin}\frac{(n+1)\,xy}{2}.\ \mathrm{Sin}\,\frac{nxy}{2}}{y.\ \mathrm{Sin}\frac{xy}{2}}.\,dx\,dy = \mathfrak{A}_{\left(\frac{a}{nb}\right)}\ \left(\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right\} > o\Big).$$

15) $p=1;\ q=\frac{ny}{a}$:

$$\int_0^\infty e^{-x}\ \mathrm{Sin}\,\frac{nxy}{a}\cdot dx=\frac{\frac{ny}{a}}{1+\left(\frac{ny}{a}\right)^2},$$

$$\int_b^\infty\int_0^\infty\frac{e^{-x}}{y}\cdot\mathrm{Sin}\,\frac{nxy}{a}\cdot dx\,dy=\ \pm\,\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctg}\,\frac{nb}{a}=\mathrm{Arctg}\,\frac{a}{nb}\ \ (b>o).$$

(XXXII) $$\int_b^\infty\int_0^\infty e^{-x}\cdot\frac{\mathrm{Sin}\,\frac{(n+1)xy}{2a}\cdot\ \mathrm{Sin}\,\frac{nxy}{2a}}{y.\ \mathrm{Sin}\,\frac{xy}{2a}}\,dx\,dy=\mathfrak{A}_{\left(\frac{a}{nb}\right)}\quad(b>o).$$

16) $p=\frac{a}{y};\ q=n$:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{ax}{y}}\,\mathrm{Sin}\,nx\,dx=\frac{n}{n^2+\left(\frac{a}{y}\right)^2}\cdot=\frac{\frac{ny^2}{a^2}}{1+\left(\frac{ny}{a}\right)^2}.$$

$$\int_b^\infty\int_0^\infty\frac{a}{y^2}\,e^{-\frac{ax}{y}}.\ \mathrm{Sin}\,nx\,dx\,dy=\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctg}\,\frac{nb}{a}=\mathrm{Arctg}\,\frac{a}{nb}\ \left[\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right\}>o\Big].$$

(XXXIII) $$\int_b^\infty\int_0^\infty ae^{-\frac{ax}{y}}.\ \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{(n+1)x}{2}\cdot\ \mathrm{Sin}\,\frac{nx}{2}}{y^2.\ \mathrm{Sin}\,\frac{x}{2}}\,dx\,dy=\mathfrak{A}_{\left(\frac{a}{nb}\right)}\ \left[\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right\}>o\Big].$$

17) $p=a;\ q=(b-n)y$:

$$\int_0^\infty e^{-ax}.\ \mathrm{Sin}\,(b-n)\,xy\,dx=\frac{(b-n)y}{a^2+[(b-n)y]^2}=\frac{\frac{(b-n)y}{a^2}}{1+\left[\frac{(b-n)y}{a}\right]^2}\quad(a>o).$$

$$\int_1^\infty\int_0^\infty\frac{ae^{-ax}}{y}\cdot\ \mathrm{Sin}\,(b-n)\,xy\,dx\,dy=\frac{\pi}{2}-\ \mathrm{Arctg}\,\frac{b-n}{a}=\mathrm{Arctg}\frac{a}{b-n}\quad(b\ \text{icke}=n).$$

(XXXIV) $$\int_1^\infty\int_0^\infty ae^{-ax}.\ \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{(2b-n)xy}{2}\cdot\ \mathrm{Sin}\,\frac{(n+1)xy}{2}}{y.\ \mathrm{Sin}\,\frac{xy}{2}}\,dx\,dy=\mathfrak{A}_{\left(\frac{a}{b-n}\right)}.$$

$$\left[\begin{matrix}a>o,\\ b\ \text{icke}=o,\,1,\,2,\,3,\ldots n\end{matrix}\right]$$

18) $p=\frac{a}{y};\ q=b-n$:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{ax}{y}}.\ \mathrm{Sin}\,(b-n)x\,dx=\frac{b-n}{(b-n)^2+\left(\frac{a}{y}\right)^2}=\frac{\frac{(b-n)y^2}{a^2}}{1+\left[\frac{(b-n)y}{a}\right]^2}.$$

$$\int_1^\infty\int_0^\infty \frac{a}{y^2}e^{-\frac{ax}{y}}.\ \mathrm{Sin}\,(b-n)\,dx\,dy=\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctg}\,\frac{b-n}{a}=\mathrm{Arctg}\,\frac{a}{b-n}\begin{bmatrix}a>o\\ b\ \text{icke}=n\end{bmatrix}.$$

$$\text{(XXXV)}\quad \int_1^\infty\int_0^\infty ae^{-\frac{ax}{y}}.\frac{\mathrm{Sin}\frac{(2b-n)x}{2}.\ \mathrm{Sin}\frac{(n+1)x}{2}}{y.^2\,\mathrm{Sin}\,\frac{x}{2}}\,dx\,dy=\mathfrak{A}_{\left(\frac{a}{b-n}\right)}\begin{bmatrix}a>o,\\ b\ \text{icke}=o,1,2,3,\ldots n\end{bmatrix}.$$

§ 12.

Genom en dylik behandling af formeln (68) erhålles en ny följd af integraler. Som förfaringssättet i intet afviker från det i föregående paragr. iakttagna, torde det vara nog att endast anföra resultaterna.

$$\text{(XXXVI)}\quad \int_b^\infty\int_0^\infty \frac{a\,\mathrm{Cos}ax}{y}.\frac{1-e^{-nxy}}{e^{xy}-1}.\ dx\,dy=\mathfrak{A}_{\left(\frac{a}{nb}\right)}\ (b>o)\ (\text{genom substitut. } p=ny;\ q=a).$$

$$\text{(XXXVII)}\quad \int_b^\infty\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos}x}{y}.\frac{1-e^{-\frac{nxy}{a}}}{e^{\frac{xy}{a}}-1}.\ dx\,dy=\mathfrak{A}_{\left(\frac{a}{nb}\right)}\left(\begin{matrix}a\\ b\end{matrix}\Big\}>o\right)\ \left(p=\frac{ny}{a};\ q=1\right).$$

$$\text{(XXXVIII)}\quad \int_b^\infty\int_0^\infty \frac{a\,\mathrm{Cos}\,\frac{ax}{y}}{y^2}.\frac{1-e^{-nx}}{e^x-1}.\ dx\,dy=\mathfrak{A}_{\left(\frac{a}{nb}\right)}\ (b>o)\ \left(p=n;\ q=\frac{a}{y}\right).$$

$$\text{(XXXIX)}\quad \int_b^\infty\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos}x}{y}.\frac{1-e^{-\frac{nax}{y}}}{e^{\frac{ax}{y}}-1}.\ dx\,dy=\mathfrak{A}_{\left(\frac{na}{b}\right)}\left(\begin{matrix}a\\ b\end{matrix}\Big\}>o\right)\ \left(p=\frac{na}{y};\ q=1\right).$$

$$\text{(XL)}\quad \int_1^\infty\int_0^\infty \frac{a\,\mathrm{Cos}ax}{ye^{bxy}}.\frac{e^{(n+1)xy}-1}{e^{xy}-1}.\ dx\,dy=\mathfrak{A}_{\left(\frac{a}{b-n}\right)}\ (b>n)\ (p=(b-n)y;\ q=a).$$

$$\text{(XLI)}\quad \int_1^\infty\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos}x}{ye^{\frac{bxy}{a}}}.\frac{e^{(n+1)\frac{xy}{a}}-1}{e^{\frac{xy}{a}}-1}.\ dx\,dy=\mathfrak{A}_{\left(\frac{a}{b-n}\right)}\begin{bmatrix}b>n,\ a>o\\ \text{eller}\\ a\ \text{och}\ b\ \text{negativa}\end{bmatrix}\left(p=\frac{(b-n)y}{a};q=1\right).$$

$$\text{(XLII)}\quad \int_1^\infty\int_0^\infty \frac{a\,\mathrm{Cos}\,\frac{ax}{y}}{y^2e^{bx}}.\frac{e^{(n+1)x}-1}{e^x-1}.\ dx\,dy=\mathfrak{A}_{\left(\frac{a}{b-n}\right)}\ (b>n)\ \left(p=b-n;\ q=\frac{a}{y}\right).$$

$$\text{(XLIII)} \quad \int_b^\infty\int_0^\infty \frac{\operatorname{Cos} x}{ye^{\frac{ax}{y}}} \cdot \frac{e^{(n+1)\frac{x}{y}}-1}{e^{\frac{x}{y}}-1} \cdot dx\, dy = \mathfrak{A}_{\left(\frac{a-n}{b}\right)} \begin{pmatrix} a > n \\ b > o \end{pmatrix} \left(p = \frac{a-n}{y};\ q = 1\right).$$

$$\text{(XLIV)} \quad \int_0^b\int_0^\infty e^{-ax} \cdot \frac{(n+1) \operatorname{Cos} nxy - n \operatorname{Cos}(n+1)xy - 1}{\left(2 \operatorname{Sin} \frac{xy}{2}\right)^2} \cdot dx\, dy = \mathfrak{A}_{\left(\frac{nb}{a}\right)} (a>o)(p=a;\ q=ny).$$ [1]

$$\text{(XLV)} \quad \int_0^b\int_0^\infty \frac{1}{ae^x} \cdot \frac{(n+1) \operatorname{Cos} \frac{nxy}{a} - n \operatorname{Cos} \frac{(n+1)xy}{a} - 1}{\left(2 \operatorname{Sin} \frac{xy}{2a}\right)^2} \cdot dx\, dy = \mathfrak{A}_{\left(\frac{nb}{a}\right)} \left(p = 1;\ q = \frac{ny}{a}\right).$$

$$\text{(XLVI)} \quad \int_b^\infty\int_0^\infty \frac{1}{ye^{\frac{ax}{y}}} \cdot \frac{(n+1) \operatorname{Cos} nx - n \operatorname{Cos}(n+1)x - 1}{\left(2 \operatorname{Sin} \frac{x}{2}\right)^2} dx\, dy = \mathfrak{A}_{\left(\frac{a}{nb}\right)} \left(\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} > o\Big) \left(p = \frac{a}{y};\ q = n\right).$$

$$\text{(XLVII)} \int_b^\infty\int_0^\infty \frac{a}{ye^{xy}} \cdot \frac{(n+1) \operatorname{Cos} nax - n \operatorname{Cos} (n+1)ax - 1}{\left(2 \operatorname{Sin} \frac{ax}{2}\right)^2} \cdot dx\, dy = \mathfrak{A}_{\left(\frac{na}{b}\right)} (b>o)(p=y;\ q=na).$$

$$\text{(XLVIII)} \int_b^\infty\int_0^\infty \frac{a}{y^2e^x} \cdot \frac{(n+1) \operatorname{Cos} \frac{nax}{y} - n \operatorname{Cos} \frac{(n+1)ax}{y} - 1}{\left(2 \operatorname{Sin} \frac{ax}{2y}\right)^2} \cdot dx\, dy = \mathfrak{A}_{\left(\frac{na}{b}\right)} (b>o)\left(p=1;\ q=\frac{na}{y}\right).$$

$$\text{(XLIX)} \quad \int_0^1\int_0^\infty e^{-ax} \cdot \frac{(b-n-1)\operatorname{Cos}(b-n)xy - (b-n)\operatorname{Cos}(b-n-1)xy - b\operatorname{Cos}(b+1)xy + (b+1)\operatorname{Cos} bxy}{\left(2 \operatorname{Sin} \frac{xy}{2}\right)^2} . dxdy =$$

$$= \mathfrak{A}_{\left(\frac{b-n}{a}\right)} (a>o)\,(p=a;\ q=(b-n)y)$$

$$\text{(L)} \int_0^1\int_0^\infty \frac{1}{ae^x} \cdot \frac{(b-n-1) \operatorname{Cos}\frac{(b-n)xy}{a} - (b-n) \operatorname{Cos}\frac{(b-n-1)xy}{a} - b\operatorname{Cos}\frac{(b+1)xy}{a} + (b+1)\operatorname{Cos}\frac{bxy}{a}}{\left(2 \operatorname{Sin} \frac{xy}{2a}\right)^2} \cdot dxdy =$$

$$= \mathfrak{A}_{\left(\frac{b-n}{a}\right)} \left(p=1;\ q=\frac{(b-n)y}{a}\right).$$

---

[1] Beträffande den summationsformel, af hvilken vi för erhållande af denna och de följande integralerna gjort bruk, se Schlömilch, Theorie der Differenzen u. Summen, pag. 107.

(LI) $$\int_1^\infty\int_0^\infty \frac{1}{ye^{\frac{ax}{y}}}\cdot\frac{(b-n-1)\,\mathrm{Cos}\,(b-n)x-(b-n)\,\mathrm{Cos}\,(b-n-1)x-b\,\mathrm{Cos}\,(b+1)x+(b+1)\,\mathrm{Cos}\,bx}{\left(2\,\mathrm{Sin}\,\frac{x}{2}\right)^2}\cdot dx\,dy=$$

$$=\mathfrak{A}_{\left(\frac{a}{b-n}\right)}\ \left(\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right\}>o\Big)\Big(p=\frac{a}{y};\ q=b-n\Big).$$

(LII) $$\int_b^\infty\int_0^\infty \frac{1}{ye^{xy}}\cdot\frac{(a-n-1)\,\mathrm{Cos}(a-n)x-(a-n)\,\mathrm{Cos}(a-n-1)x-a\,\mathrm{Cos}(a+1)x+(a+1)\,\mathrm{Cos}\,ax}{\left(2\,\mathrm{Sin}\,\frac{x}{2}\right)^2}\cdot dx\,dy=$$

$$=\mathfrak{A}_{\left(\frac{a-n}{b}\right)}\ (b>o)\ (p=y;\ q=a-n).$$

(LIII) $$\int_b^\infty\int_0^\infty \frac{1}{y^2e^x}\cdot\frac{(a-n-1)\mathrm{Cos}\frac{(a-n)x}{y}-(a-n)\mathrm{Cos}\frac{(a-n-1)x}{y}-a\mathrm{Cos}\frac{(a+1)x}{y}+(a+1)\mathrm{Cos}\frac{ax}{y}}{\left(2\,\mathrm{Sin}\,\frac{x}{2y}\right)^2}\cdot dxdy=$$

$$=\mathfrak{A}_{\left(\frac{a-n}{b}\right)}\ (b>o)\Big(p=1;\ q=\frac{a-n}{y}\Big).$$



Zur Theorie des *Borchardt*schen arithmetisch-geometrischen Mittels aus vier Elementen.

Hierzu die Figurentafel I.

(Von Herrn *Karl Schering* in Göttingen.)

Herr *Borchardt* hat in vorigem Jahre*) den Begriff des arithmetisch-geometrischen Mittels aus vier von einander unabhängigen Elementen in die Wissenschaft eingeführt und mit Hülfe der Theorie der hyperelliptischen Functionen eine Darstellung dieses Mittels durch eine zweigliedrige Determinante hyperelliptischer Integrale gegeben.

In der vorliegenden Arbeit ist, unabhängig von den eben angegebenen Resultaten, gezeigt, dass sich aus einem Producte von *Gauss*ischen arithmetisch-geometrischen Mitteln, ein Mittel aus *drei* Elementen bilden lässt, dessen Algorithmus mit dem von Herrn *Borchardt* für vier Elemente aufgestellten, in dem Falle, dass zwei derselben gleich sind, übereinstimmt. Die Darstellung dieses Mittels aus drei Elementen durch hyperelliptische Integrale ist im Folgenden mit Benutzung einer von *Jacobi* gegebenen Reduction gewisser hyperelliptischer Integrale auf elliptische, und mit Hülfe der Theorie der *Riemann*schen Flächen abgeleitet. Die Construction dieser Flächen giebt zugleich Gelegenheit, die Periodicitätsmoduln dieser hyperelliptischen Integrale vollständig zu bestimmen und zu zeigen, dass zwischen ihnen die von *Riemann* aufgestellten Relationen bestehen.

Die abgeleitete Darstellung des Mittels aus drei Elementen erweist sich als ein specieller Fall des oben erwähnten *Borchardt*schen Theorems. Mit Hülfe dieses Theorems und der *Jacobi*schen Reduction ergiebt sich ferner, dass ein Mittel aus vier Elementen, wenn zwischen diesen eine gewisse Bedingungsgleichung besteht, auf Mittel von zwei Elementen zurückgeführt werden kann.

§. 1.

Es seien f, φ, ψ drei positive reelle Grössen, $M(f, \varphi)$ bezeichne das arithmetisch-geometrische Mittel aus f und φ, $M(f, \psi)$ das Mittel aus f

---

*) Monatsberichte der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Nov. 1876 und Febr. 1877.



und ψ, dann ist der Definition nach:

$$M(f, \varphi) = M\left(\frac{f+\varphi}{2}, \sqrt{f\varphi}\right),$$

$$M(f, \psi) = M\left(\frac{f+\psi}{2}, \sqrt{f\psi}\right).$$

Um in den Mitteln auf der rechten Seite wieder ein beiden gemeinsames Argument zu erhalten, multipliciren wir die Argumente des ersteren Mittels mit $\sqrt{\frac{\psi}{f}}$, die des zweiten mit $\sqrt{\frac{\varphi}{f}}$. Dann ergeben sich mit Hülfe von:

$$M(a.t, b.t) = M(a, b).t,$$

worin t eine reelle positive Grösse bedeutet, die folgenden Gleichungen:

$$M(f, \varphi) = \sqrt{\frac{f}{\psi}}\, M\left(\frac{f+\varphi}{2}\sqrt{\frac{\psi}{f}}, \sqrt{\varphi\psi}\right),$$

$$M(f, \psi) = \sqrt{\frac{f}{\varphi}}\, M\left(\frac{f+\psi}{2}\sqrt{\frac{\varphi}{f}}, \sqrt{\varphi\psi}\right),$$

und hieraus:

$$\frac{M(f, \varphi)M(f, \psi)}{f} = \frac{M\left(\frac{f+\varphi}{2}\sqrt{\frac{\psi}{f}}, \sqrt{\varphi\psi}\right).M\left(\frac{f+\psi}{2}\sqrt{\frac{\varphi}{f}}, \sqrt{\varphi\psi}\right)}{\sqrt{\varphi\psi}}.$$

Setzen wir (abweichend von der gewöhnlichen Bezeichnungsweise der Glieder des Algorithmus für ein Mittel aus zwei Elementen):

$$f_1 = \sqrt{\varphi\psi}, \quad \varphi_1 = \frac{f+\varphi}{2}\sqrt{\frac{\psi}{f}}, \quad \psi_1 = \frac{f+\psi}{2}\sqrt{\frac{\varphi}{f}},$$

so wird:

$$\frac{M(f, \varphi)M(f, \psi)}{f} = \frac{M(f_1, \varphi_1)M(f_1, \psi_1)}{f_1}.$$

Durch ein analoges Verfahren gelangt man zu der Gleichung:

$$\frac{M(f_1, \varphi_1)M(f_1, \psi_1)}{f_1} = \frac{M(f_2, \varphi_2)M(f_2, \psi_2)}{f_2},$$

wenn f_2, φ_2, ψ_2 ebenso von f_1, φ_1, ψ_1 abhängen, wie f_1, φ_1, ψ_1 von f, φ, ψ. Die fortgesetzte Anwendung dieser Schlussweise führt also zur Gleichung:

$$\frac{M(f, \varphi)M(f, \psi)}{f} = \frac{M(f_n, \varphi_n)M(f_n, \psi_n)}{f_n} = \frac{M(f_{n-1}, \varphi_{n-1})M(f_{n-1}, \psi_{n-1})}{f_{n+1}},$$

wenn

$$n = 1, 2, 3 \ldots$$

und wenn die Abhängigkeit der Grössen f_{n+1}, φ_{n+1}, ψ_{n+1} von f_n, φ_n, ψ_n durch die Gleichungen:

$$\text{(I.)} \quad \begin{cases} f_{n+1} = \sqrt{\varphi_n \psi_n}, \\ \varphi_{n+1} = \dfrac{f_n + \varphi_n}{2} \sqrt{\dfrac{\psi_n}{f_n}}, \\ \psi_{n+1} = \dfrac{f_n + \psi_n}{2} \sqrt{\dfrac{\varphi_n}{f_n}} \end{cases}$$

bestimmt wird. Den Wurzeln ist immer das positive Vorzeichen zu geben.

§. 2.

Grenzwerth der Grössen f_n, φ_n, ψ_n.

Es bestehe zwischen f, φ, ψ die Ungleichheit:

$$f < \varphi < \psi,$$

dann folgt aus:

$$\varphi_1 = \frac{f+\varphi}{2} \sqrt{\frac{\psi}{f}} = \frac{\frac{f+\varphi}{2}}{\sqrt{f\varphi}} \sqrt{\psi\varphi} = \frac{\frac{f+\varphi}{2}}{\sqrt{f\varphi}} \cdot f_1,$$

da das arithmetische Mittel zweier Quantitäten grösser ist als das geometrische, zunächst:

$$f_1 < \varphi_1.$$

Ferner ist:

$$\psi_1 - \varphi_1 = \frac{f+\psi}{2} \sqrt{\frac{\varphi}{f}} - \frac{f+\varphi}{2} \sqrt{\frac{\psi}{f}} = \frac{1}{2\sqrt{f}} \{ f\sqrt{\varphi} + \psi\sqrt{\varphi} - f\sqrt{\psi} - \varphi\sqrt{\psi} \}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{f}} \{ \sqrt{\psi\varphi} - f \} \{ \sqrt{\psi} - \sqrt{\varphi} \},$$

und nach der Voraussetzung:

$$\sqrt{\varphi\psi} - f > 0, \quad \sqrt{\psi} - \sqrt{\varphi} > 0,$$

demnach auch:

$$\varphi_1 < \psi_1.$$

Also die Ungleichheit $f < \varphi < \psi$ zieht die andere: $f_1 < \varphi_1 < \psi_1$ nach sich.

Aus dieser folgt analog:

$$f_2 < \varphi_2 < \psi_2$$

und allgemein:

$$f_n < \varphi_n < \psi_n.$$

Die ihrer Grösse nach geordnete Reihenfolge der Quantitäten f_n, φ_n, ψ_n bleibt also unter der Voraussetzung $f < \varphi < \psi$ für jeden Index n ungeändert.

Aus den Gleichungen

$$\frac{\varphi_{n+1}}{f_{n+1}} = \frac{\frac{f_n+\varphi_n}{2}\sqrt{\frac{\psi_n}{f_n}}}{\sqrt{\varphi_n\psi_n}} = \frac{\frac{f_n+\varphi_n}{2}}{\sqrt{f_n\varphi_n}}$$

$$\frac{\psi_{n+1}}{f_{n+1}} = \frac{\frac{f_n+\psi_n}{2}\sqrt{\frac{\varphi_n}{f_n}}}{\sqrt{\varphi_n\psi_n}} = \frac{\frac{f_n+\psi_n}{2}}{\sqrt{f_n\psi_n}}$$

in Verbindung mit den, aus $f_n < \varphi_n < \psi_n$ folgenden, Ungleichheiten:

$$\frac{f_n+\varphi_n}{2} < \varphi_n, \qquad \frac{f_n+\psi_n}{2} < \psi_n$$

oder:

$$\frac{\frac{f_n+\varphi_n}{2}}{\sqrt{f_n\varphi_n}} < \sqrt{\frac{\varphi_n}{f_n}}, \qquad \frac{\frac{f_n+\psi_n}{2}}{\sqrt{f_n\psi_n}} < \sqrt{\frac{\psi_n}{f_n}}$$

ergiebt sich:

$$1 < \frac{\varphi_{n+1}}{f_{n+1}} < \left(\frac{\varphi_n}{f_n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$1 < \frac{\psi_{n+1}}{f_{n+1}} < \left(\frac{\psi_n}{f_n}\right)^{\frac{1}{2}};$$

ebenso folgt:

$$1 < \frac{\varphi_{n+2}}{f_{n+2}} < \left(\frac{\varphi_{n+1}}{f_{n+1}}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{\varphi_n}{f_n}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$1 < \frac{\psi_{n+2}}{f_{n+2}} < \left(\frac{\psi_{n+1}}{f_{n+1}}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{\psi_n}{f_n}\right)^{\frac{1}{4}}$$

und allgemein, wenn m eine positive ganze Zahl bedeutet:

$$1 < \frac{\varphi_{n+m}}{f_{n+m}} < \left(\frac{\varphi_n}{f_n}\right)^{\frac{1}{2^m}}$$

$$1 < \frac{\psi_{n+m}}{f_{n+m}} < \left(\frac{\psi_n}{f_n}\right)^{\frac{1}{2^m}}.$$

Es ist für $\lim m = \infty$ also:

$$\lim \frac{\varphi_{n+m}}{f_{n-m}} = 1. \quad \lim \frac{\psi_{n+m}}{f_{n+m}} = 1$$

oder:

$$\lim f_n = \lim \varphi_n = \lim \psi_n$$

für $\lim n = \infty$.

Wir haben demnach:

$$\frac{\mathrm{M}(f,\varphi)\mathrm{M}(f,\psi)}{f} = \frac{\mathrm{M}(f_n,\varphi_n)\mathrm{M}(f_n,\psi_n)}{f_n} =$$

$$= \frac{\mathrm{M}(\lim f_n, \lim \varphi_n)\mathrm{M}(\lim f_n, \lim \psi_n)}{\lim f_n} = \lim f_n = \lim \varphi_n = \lim \psi_n.$$

Es ist also, wenn man:

$$\frac{\mathrm{M}(f,\varphi)\mathrm{M}(f,\varphi)}{f} = F(f,\ \varphi,\ \psi)$$

setzt, die Function F auch durch den obigen Algorithmus (I.) ***ihrem Werthe nach für vorgegebene*** $f,\ \varphi,\ \psi$ ***vollkommen bestimmt. Der Werth derselben ist der Grenzwerth, dem sich die Grössen*** f_n, φ_n, ψ_n ***mit wachsendem*** n ***nähern.***

Dieser Grenzwerth liegt im allgemeinen nicht innerhalb des grössten und kleinsten der Anfangswerthe f, φ, ψ; denn aus

$$f_{n+1} = \sqrt{\varphi_n \psi_n}$$

folgt zunächst, wenn wieder

$$f < \varphi < \psi$$

vorausgesetzt wird:

$$\varphi_n < f_{n+1} < \psi_n;$$

also liegt die kleinste Grösse der nächst höheren Ordnung zwischen den beiden grösseren der vorhergehenden Ordnung.

Weiter ist:

$$\psi_{n+1} - f_{n+1} = \frac{f_n + \psi_n}{2}\sqrt{\frac{\varphi_n}{f_n}} - \sqrt{\varphi_n \psi_n}$$

$$= \sqrt{\frac{\varphi_n}{f_n}}\left\{\frac{f_n + \psi_n}{2} - \sqrt{f_n \psi_n}\right\}$$

und

$$\frac{f_n + \psi_n}{2} - \sqrt{f_n \psi_n} < \psi_n - f_n,$$

es hängt also wesentlich von dem Verhältnisse $\frac{\varphi_n}{f_n}$ ab, ob:

$$\psi_{n+1} - f_{n+1} > \psi_n - f_n$$

wird, und daher der oben bemerkte Fall eintritt. Da aber:

$$1 < \frac{\varphi_n}{f_n} < \left(\frac{\varphi_{n-1}}{f_{n-1}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ist, so kann im allgemeinen erst für ein hinreichend grosses n

$$\psi_{n+1} - f_{n+1} < \psi_n - f_n$$

sein.

Die Art und Schnelligkeit der Annäherung von f_n, φ_n, ψ_n an den Grenzwerth möge folgendes Beispiel zeigen, in welchem f_n, φ_n, ψ_n nach dem obigen Algorithmus (I.) berechnet sind, μ_n, ν_n resp. μ'_n, ν'_n dagegen die arithmetischen und geometrischen Mittel aus μ_{n-1}, ν_{n-1} resp. μ'_{n-1}, ν'_{n-1} bedeuten.

Beispiel:

$f = 1$	also: $\mathrm{M}(f, \varphi) = \mathrm{M}(1,100)$.	$\mathrm{M}(f, \psi) = \mathrm{M}(1,102)$.
$\varphi = 100$	$\mu = 1$	$\mu' = 1$
$\psi = 102$	$\nu = 100$	$\nu' = 102$
$f_1 = 100.99$		
$\varphi_1 = 510.03$	$\mu_1 = 50.5$	$\mu'_1 = 51.5$
$\psi_1 = 515,00$	$\nu_1 = 10$	$\nu'_1 = 10,0997$
$f_2 = 512.51$		
$\varphi_2 = 689.89$	$\mu_2 = 30.25$	$\mu'_2 = 30.7999$
$\psi_2 = 692.15$	$\nu_2 = 22.4725$	$\nu'_2 = 22,8064$
$f_3 = 691.02$		
$\varphi_3 = 698.67$	$\mu_3 = 26.3613$	$\mu'_3 = 26.8032$
$\psi_3 = 698,83$	$\nu_3 = 26.0729$	$\nu'_3 = 26.5039$
$f_4 = 698.75$		
$\varphi_4 = 698.76$	$\mu_4 = 26.2171$	$\mu'_4 = 26.6536$
$\psi_4 = 698,76$	$\nu_4 = 26.2168$	$\nu'_4 = 26.6532$
$f_5 = 698.76$	$\mu_5 = 26,21695$	$\mu'_5 = 26.6534$
	$\mu_5 . \mu'_5 = 698.76$.	

Demnach ist auf zwei Decimalstellen genau:

$$f_5 = \varphi_5 = \psi_5 = 698,76 = \mu_5 \mu'_5 = \frac{\mathrm{M}(f, \varphi)\mathrm{M}(f, \psi)}{f}.$$

§. 3.

Die Differenzen der Quadrate von f_n, φ_n, ψ_n in Verbindung mit dem Algorithmus.

Die Darstellung der Grössen f_n, φ_n, ψ_n durch die folgenden Glieder im Algorithmus, f_{n+1}, φ_{n+1}, ψ_{n+1}, also die Fortsetzung des Algorithmus (I.) nach rückwärts, leitet auch hier, wie bei dem Algorithmus aus zwei Elementen zur Einführung der Differenzen der Quadrate.

Es ist nach (I.) pag. 117:

$$f_{n+1} = \sqrt{\varphi_n \psi_n},$$

$$\varphi_{n+1} = \frac{f_n+\varphi_n}{2}\sqrt{\frac{\psi_n}{f_n}} = \frac{f_n.\sqrt{\psi_n}+\sqrt{\varphi_n\psi_n}.\sqrt{\varphi_n}}{2\sqrt{f_n}} = \frac{f_n.\sqrt{\psi_n}+f_{n+1}.\sqrt{\varphi_n}}{2\sqrt{f_n}},$$

$$\psi_{n+1} = \frac{f_n+\psi_n}{2}\sqrt{\frac{\varphi_n}{f_n}} = \frac{f_n.\sqrt{\varphi_n}+\sqrt{\varphi_n\psi_n}.\sqrt{\psi_n}}{2\sqrt{f_n}} = \frac{f_n.\sqrt{\varphi_n}+f_{n+1}.\sqrt{\psi_n}}{2\sqrt{f_n}},$$

also:

$$f^2_{n+1} = \varphi_n\psi_n,$$

$$4\varphi^2_{n+1} = f_n\psi_n+2f^2_{n+1}+\frac{f^4_{n+1}}{f_n\psi_n},$$

$$4\psi^2_{n+1} = f_n\varphi_n+2f^2_{n+1}+\frac{f^4_{n+1}}{f_n\varphi_n};$$

$$\varphi_n\psi_n = f^2_{n+1},$$

$$f_n\psi_n = 2\varphi^2_{n+1}-f^2_{n+1}\pm\sqrt{(2\varphi^2_{n+1}-f^2_{n+1})^2-f^4_{n+1}},$$

$$f_n\varphi_n = 2\psi^2_{n+1}-f^2_{n+1}\pm\sqrt{(2\psi^2_{n+1}-f^2_{n+1})^2-f^4_{n+1}}.$$

Diesen Gleichungen kann man auch die Form geben:

$$\varphi_n\psi_n = f^2_{n+1},$$

$$f_n\psi_n = (\varphi_{n+1}+\varepsilon\sqrt{\varphi^2_{n+1}-f^2_{n+1}})^2,$$

$$f_n\varphi_n = (\psi_{n+1}+\eta\sqrt{\psi^2_{n+1}-f^2_{n+1}})^2,$$

wenn ε und η die positive oder negative Einheit bedeutet. Setzt man noch:

$$\text{(II.)}\quad \begin{cases} \varrho_{n+1} = +\sqrt{\varphi^2_{n+1}-f^2_{n+1}}, \\ \sigma_{n+1} = +\sqrt{\psi^2_{n+1}-f^2_{n+1}}, \end{cases}$$

so ergiebt sich:

$$\text{(III.)}\quad \begin{cases} f_n = +\sqrt{\dfrac{f_n\psi_n.f_n\varphi_n}{\varphi_n\psi_n}} = \dfrac{(\varphi_{n+1}+\varepsilon.\varrho_{n+1})(\psi_{n+1}+\eta.\sigma_{n+1})}{f_{n+1}} \\ \varphi_n = +\sqrt{\dfrac{f_n\varphi_n.\varphi_n\psi_n}{f_n\psi_n}} = \dfrac{\psi_{n+1}+\eta.\sigma_{n+1}}{\varphi_{n+1}+\varepsilon.\varrho_{n+1}}.f_{n+1} \\ \psi_n = +\sqrt{\dfrac{f_n\psi_n.\varphi_n\psi_n}{f_n\varphi_n}} = \dfrac{\varphi_{n+1}+\varepsilon.\varrho_{n+1}}{\psi_{n+1}+\eta.\sigma_{n+1}}.f_{n+1}. \end{cases}$$

Ferner wird gemäss (I.) und (II.):

$$\varphi^2_{n+1}-f^2_{n+1} \equiv \varrho^2_{n+1} = \frac{\psi_n}{f_n}\left(\frac{\varphi_n-f_n}{2}\right)^2,$$

$$\psi^2_{n+1}-f^2_{n+1} \equiv \sigma^2_{n+1} = \frac{\varphi_n}{f_n}\left(\frac{\psi_n-f_n}{2}\right)^2,$$

also:

$$\varrho_{n+1} = \frac{\varphi_n - f_n}{2} \sqrt{\frac{\psi_n}{f_n}}$$

$$\sigma_{n+1} = \frac{\psi_n - f_n}{2} \sqrt{\frac{\varphi_n}{f_n}}.$$

In dem Algorithmus (III.) sind die Grössen f_n, φ_n, ψ_n als Functionen von f_{n+1}, φ_{n+1}, ψ_{n+1} noch unbestimmt in Folge der Werthe von ε und η. Um nun auch den rückwärts gehenden Algorithmus von jeder Zweideutigkeit zu befreien, ist noch eine Bestimmung über diese Grössen zu treffen. Man stelle die Bedingung, dass, wie aus:

$$f_n < \varphi_n < \psi_n$$

die Ungleichheiten:

$$f_{n+1} < \varphi_{n+1} < \psi_{n+1}$$

folgen, so auch die Umkehrung dieses Schlusses gelte.

Aus dem Algorithmus (III.) folgt:

$$\varphi_n - f_n = \frac{\psi_{n+1} + \eta . \sigma_{n+1}}{\varphi_{n+1} + \varepsilon . \varrho_{n+1}} \cdot \frac{1}{f_{n+1}} \{f_{n+1}^2 - (\varphi_{n+1} + \varepsilon . \varrho_{n+1})^2\}$$

$$\psi_n - f_n = \frac{\varphi_{n+1} + \varepsilon . \varrho_{n+1}}{\psi_{n+1} + \eta . \sigma_{n+1}} \cdot \frac{1}{f_{n+1}} \{f_{n+1}^2 - (\psi_{n+1} + \eta . \sigma_{n+1})^2\}$$

oder:

$$\varphi_n - f_n = \frac{\psi_{n+1} + \eta . \sigma_{n+1}}{\varphi_{n+1} + \varepsilon . \varrho_{n+1}} \cdot \frac{-2 . \varrho_{n+1}}{f_{n+1}} (\varepsilon . \varphi_{n+1} + \varrho_{n+1})$$

$$\psi_n - f_n = \frac{\varphi_{n+1} + \varepsilon . \varrho_{n+1}}{\psi_{n+1} + \eta . \sigma_{n+1}} \cdot \frac{-2 . \sigma_{n+1}}{f_{n+1}} (\eta . \psi_{n+1} + \sigma_{n+1}).$$

Mit Hülfe der Ungleichheiten:

$$\psi_{n+1} + \eta . \sigma_{n+1} > 0, \quad \varphi_{n+1} + \varepsilon . \varrho_{n+1} > 0$$

$$\eta . \psi_{n+1} + \sigma_{n+1} \gtrless 0, \quad \text{wenn} \quad \eta = \pm 1; \quad \varepsilon . \varphi_{n+1} + \varrho_{n+1} \gtrless 0, \quad \text{wenn} \quad \varepsilon = \pm 1$$

ergiebt sich, dass den eben gestellten Bedingungen nur genügt werden kann, wenn:

$$\eta = -1 \quad \text{und} \quad \varepsilon = -1$$

gesetzt wird.

Es besteht dann auch die Ungleichheit:

$$\varphi_n < \psi_n,$$

denn es ist dann:

$$\psi_n - \varphi_n = f_{n+1} \left\{ \frac{\varphi_{n+1} - \varrho_{n+1}}{\psi_{n+1} - \sigma_{n+1}} - \frac{\psi_{n+1} - \sigma_{n+1}}{\varphi_{n+1} - \varrho_{n+1}} \right\},$$

aber aus

$$f_{n+1} < \varphi_{n+1} < \psi_{n+1}$$

folgt:

$$\varphi_{n+1} - \varrho_{n+1} > \psi_{n+1} - \sigma_{n+1}$$

oder:

$$\frac{\varphi_{n+1} - \varrho_{n+1}}{\psi_{n+1} - \sigma_{n+1}} > \frac{\psi_{n+1} - \sigma_{n+1}}{\varphi_{n+1} - \varrho_{n+1}}$$

also wird auch

$$\varphi_n < \psi_n.$$

Es lautet demnach der vollständige Algorithmus:

$$_1f = \frac{(\varphi - \varrho)(\psi - \sigma)}{f}, \qquad f, \qquad f_1 f_1 = \varphi . \psi,$$

$$_1\varphi = \frac{\psi - \sigma}{\varphi - \varrho} . f, \qquad \varphi, \qquad 2\varphi_1 = (\varphi + f)\sqrt{\frac{\psi}{f}},$$

$$_1\psi = \frac{\varphi - \varrho}{\psi - \sigma} . f, \qquad \psi, \qquad 2\psi_1 = (\psi + f)\sqrt{\frac{\varphi}{f}},$$

$$_1\varrho = (\psi - \sigma)\sqrt{\frac{f}{\varphi - \varrho} + \frac{\varphi - \varrho}{f}} . \sqrt{\frac{f}{\varphi - \varrho} - \frac{\varphi - \varrho}{f}}, \qquad \varrho\varrho = \varphi\varphi - ff, \qquad 2\varrho_1 = (\varphi - f)\sqrt{\frac{\psi}{f}},$$

$$_1\sigma = (\varphi - \varrho)\sqrt{\frac{f}{\psi - \sigma} + \frac{\psi - \sigma}{f}} . \sqrt{\frac{f}{\psi - \sigma} - \frac{\psi - \sigma}{f}}, \qquad \sigma\sigma = \psi\psi - ff, \qquad 2\sigma_1 = (\psi - f)\sqrt{\frac{\varphi}{f}}.$$

Aus diesem Algorithmus, wie aus der Definitionsgleichung

$$F(f, \varphi, \psi) = \frac{M(f, \varphi) M(f, \psi)}{f}$$

folgen unmittelbar die Gleichungen:

$$t . F(f, \varphi, \psi) = F(t . f, t . \varphi, t . \psi),$$

wenn t eine reelle positive Grösse bedeutet, und ferner:

$$F(f, f, f) = f$$
$$F(f, \varphi, \psi) = F(f, \psi, \varphi).$$

§. 4.

Neuer Algorithmus aus den Grössen f_n, φ_n, ψ_n.

Bildet man das arithmetische und geometrische Mittel der beiden vertauschbaren Argumente φ_{n+1} und ψ_{n+1}, ausgedrückt durch f_n, φ_n, ψ_n, so erhält man nach leichten Umformungen wieder ein geometrisches und arith-

metisches Mittel zweier Grössen. In der That ist:

$$\varphi_{n+1}+\psi_{n+1} = \frac{1}{2\sqrt{f_n}}\cdot\{\sqrt{\psi_n}(\varphi_n+f_n)+\sqrt{\varphi_n}(\psi_n+f_n)\}$$

$$\varphi_{n+1}\cdot\psi_{n+1} = \frac{1}{4f_n}\cdot\{\varphi_n+f_n\}\cdot\{\psi_n+f_n\}\cdot\sqrt{\varphi_n\psi_n}$$

$$\varphi_{n+1}+\psi_{n+1} = \frac{1}{2\sqrt{f_n}}\cdot\{\sqrt{\varphi_n\psi_n}(\sqrt{\varphi_n}+\sqrt{\psi_n})+f_n(\sqrt{\varphi_n}+\sqrt{\psi_n})\}$$

$$\varphi_{n+1}\cdot\psi_{n+1} = \frac{1}{4f_n}\cdot\{f_n^2+\varphi_n\psi_n+f_n(\varphi_n+\psi_n)\}\cdot\sqrt{\varphi_n\psi_n}$$

$$(1.)\quad \varphi_{n+1}+\psi_{n+1} = \frac{1}{2\sqrt{f_n}}\cdot\{f_{n+1}+f_n\}\cdot\{\sqrt{\varphi_n}+\sqrt{\psi_n}\}$$

$$(1^a.)\quad \varphi_{n+1}\cdot\psi_{n+1} = \frac{1}{4f_n}\cdot\{f_n^2+f_{n+1}^2+f_n(\varphi_n+\psi_n)\}\cdot f_{n+1}$$

$$\varphi_{n+1}\cdot\psi_{n+1} = f_{n+2}^2.$$

Also:

$$f_{n+1}^2+f_{n+2}^2 = \frac{1}{4f_n}\cdot\{f_n^2+f_{n+1}^2+2f_nf_{n+1}+2f_n\sqrt{\varphi_n\psi_n}+f_n(\varphi_n+\psi_n)\}\cdot f_{n+1}$$

$$f_{n+1}^2+f_{n+2}^2 = \frac{1}{4f_n}\cdot\{(f_{n+1}+f_n)^2+f_n(\sqrt{\varphi_n}+\sqrt{\psi_n})^2\}\cdot f_{n+1}$$

$$(2.)\quad \frac{f_{n+1}^2+f_{n+2}^2}{2f_{n+1}} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{f_{n+1}+f_n}{2\sqrt{f_n}}\right)^2+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\varphi_n}+\sqrt{\psi_n}}{2}\right)^2.$$

Die obige Gleichung (1.) kann die Form annehmen:

$$(3.)\quad \frac{\varphi_{n+1}+\psi_{n+1}}{2} = \sqrt{\left(\frac{f_{n+1}+f_n}{2\sqrt{f_n}}\right)^2\cdot\left(\frac{\sqrt{\varphi_n}+\sqrt{\psi_n}}{2}\right)^2}.$$

Die rechten Seiten der Gleichungen (2.) und (3.) sind das arithmetische und das geometrische Mittel zweier Grössen. Um auf der linken Seite dieselben Grössen mit um eine Einheit erhöhtem Index zu erhalten, addire man zu beiden Gleichungen:

$$f_{n+2} = \sqrt{\varphi_{n+1}\cdot\psi_{n+1}},$$

dann wird:

$$(4.)\quad \left(\frac{f_{n+2}+f_{n+1}}{2\sqrt{f_{n+1}}}\right)^2 = \tfrac{1}{4}\left(\frac{f_{n+1}+f_n}{2\sqrt{f_n}}\right)^2+\tfrac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{\varphi_n}+\sqrt{\psi_n}}{2}\right)^2+\frac{f_{n+2}}{2}.$$

$$(5.)\quad \left(\frac{\sqrt{\varphi_{n+1}}+\sqrt{\psi_{n+1}}}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{f_{n+1}+f_n}{2\sqrt{f_n}}\right)^2\cdot\left(\frac{\sqrt{\varphi_n}+\sqrt{\psi_n}}{2}\right)^2}+\frac{f_{n+2}}{2}.$$

Setzen wir also:

$$(\text{IV.})\quad \begin{cases} a_{n+1} = \left(\dfrac{f_{n+1}+f_n}{2\sqrt{f_n}}\right)^2, \\ b_{n+1} = \left(\dfrac{\sqrt{\varphi_n}+\sqrt{\psi_n}}{2}\right)^2, \\ c_{n+1} = f_{n+2}, \end{cases}$$

so ergiebt sich:

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{4} + \frac{c_{n+1}}{2},$$

$$b_{n+2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{a_{n+1}.b_{n+1}} + \frac{c_{n+1}}{2}.$$

Um c_{n+2} als Function von a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} darzustellen, bilden wir die obige Gleichung (1^a.) mit um eine Einheit erhöhtem Index:

$$\varphi_{n+2}.\psi_{n+2} \equiv f_{n+3}^2 = \frac{1}{4f_{n+1}}.\{f_{n+1}^2+f_{n+2}^2+f_{n+1}(\varphi_{n+1}+\psi_{n+1})\}.f_{n+2}$$

$$= \frac{f_{n+2}}{2}.\left\{\frac{f_{n+2}^2+f_{n+1}^2}{2f_{n+1}} + \frac{\varphi_{n+1}+\psi_{n+1}}{2}\right\},$$

dann wird mit Hülfe von (2.) und (3.):

$$(6.)\quad \begin{cases} f_{n+3}^2 = \dfrac{f_{n+2}}{2}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{f_{n+1}+f_n}{2\sqrt{f_n}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}.\dfrac{\sqrt{\varphi_n}+\sqrt{\psi_n}}{2}\right\}^2, \\ f_{n+3} = \dfrac{\sqrt{f_{n+2}}}{2}\left\{\dfrac{f_{n+1}+f_n}{2\sqrt{f_n}} + \dfrac{\sqrt{\varphi_n}+\sqrt{\psi_n}}{2}\right\}, \end{cases}$$

das ist:

$$c_{n+2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{c_{n+1}}\{\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{b_{n+1}}\}.$$

In derselben Weise, wie a_{n+2}, b_{n+2}, c_{n+2} von a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} abhängen, sind wieder a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} von a_n, b_n, c_n abhängig, wie sich aus den obigen Gleichungen ergiebt, wenn darin $(n-1)$ statt n eingesetzt wird.

Der Algorithmus der Grössen a, b, c lautet demnach:

$$(\text{V.})\quad \begin{cases} 2a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} + c_n, \\ 2b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} + c_n, \\ 2c_{n+1} = (\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n})\sqrt{c_n}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (IV.)

$$a_n = \left(\frac{f_n+f_{n-1}}{2\sqrt{f_{n-1}}}\right)^2,$$

$$b_n = \left(\frac{\sqrt{\varphi_{n-1}}+\sqrt{\psi_{n-1}}}{2}\right)^2,$$

$$c_n = f_{n+1}$$

sind umgekehrt die Grössen f_n, φ_n, ψ_n als Functionen von a_n, b_n, c_n zu bestimmen. Es folgt unmittelbar mit Hülfe der Gleichungen (2.) resp. (3.),

wenn in diesen der Index um eine Einheit vermindert wird:

$$\frac{a_n+b_n}{2} = \frac{f_n^2+f_{n+1}^2}{2f_n} = \frac{f_n^2+c_n^2}{2f_n}.$$

ferner:

$$a_n b_n = \left(\frac{\psi_n+\varphi_n}{2}\right)^2,$$

$$c_n = f_{n+1} = \sqrt{\varphi_n \psi_n}.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\text{(VI.)}\quad \begin{cases} f_n = \dfrac{a_n+b_n}{2} + \delta . \sqrt{\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)^2 - c_n^2}, \\ \varphi_n = \sqrt{a_n b_n} - \sqrt{(\sqrt{a_n b_n})^2 - c_n^2}, \\ \psi_n = \sqrt{a_n b_n} + \sqrt{(\sqrt{a_n b_n})^2 - c_n^2}, \end{cases}$$

worin:

$$\delta = \pm 1.$$

Wie diese Gleichungen zeigen, können die Grössen f_n, φ_n, ψ_n angesehen werden als Glieder in dem Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels aus zwei Elementen: Nimmt man $\sqrt{a_n b_n}$ als erstes und c_n als zweites Element und bildet aus ihnen nach diesem Algorithmus die beiden Glieder der vorhergehenden Ordnung, so erhält man φ_n und ψ_n. Nimmt man $\frac{a_n+b_n}{2}$ als erstes und c_n als zweites Element und bildet aus ihnen ebenfalls nach dem Algorithmus für ein Mittel aus zwei Elementen die beiden Glieder der vorhergehenden Ordnung, so ist eins dieser Glieder gleich f_n.

§. 5.

Grenzwerth der Grössen a_n, b_n, c_n.

Die aus dem Algorithmus (V.) folgenden Gleichungen:

$$2(a_{n+1}-b_{n+1}) = \frac{a_n+b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} = 2\left(\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}}{2}\right)^2$$

$$2(b_{n+1}-c_{n+1}) = (\sqrt{a_n}-\sqrt{c_n})(\sqrt{b_n}-\sqrt{c_n})$$

$$2(a_{n+1}-c_{n+1}) = \left(\frac{a_n+c_n}{2} - \sqrt{a_n c_n}\right) + \left(\frac{b_n+c_n}{2} - \sqrt{b_n c_n}\right)$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{c_n}}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{b_n}-\sqrt{c_n}}{2}\right)^2$$

zeigen, dass aus der Voraussetzung:

$$a_n > b_n > c_n$$

die Ungleichheiten:

$$a_{n+1} > b_{n+1} > c_{n+1}$$

und:

$$2(a_{n+1} - c_{n+1}) < \frac{a_n + c_n}{2} - c_n + \frac{a_n + c_n}{2} - c_n$$

$$a_{n+1} - c_{n+1} < \frac{a_n - c_n}{2}$$

folgen. Hieraus ergiebt sich also:

$$\lim a_n = \lim b_n = \lim c_n$$

für

$$\lim n = \infty.$$

Stellen wir die Bedingung, dass aus

$$a_n > b_n > c_n$$

folgen soll:

$$f_n < \varphi_n < \psi_n,$$

so wird in der ersten der Gleichungen (VI.) der Werth von δ bestimmt, denn aus der Identität:

$$\left\{\frac{a_n + b_n}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^2 - c_n^2}\right\}\left\{\frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^2 - c_n^2}\right\} \equiv$$

$$\equiv \left\{\sqrt{a_n b_n} + \sqrt{a_n b_n - c_n^2}\right\}\left\{\sqrt{a_n b_n} - \sqrt{a_n b_n - c_n^2}\right\}$$

und der Ungleichheit:

$$\frac{a_n + b_n}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^2 - c_n^2} > \sqrt{a_n b_n} + \sqrt{a_n b_n - c_n^2}$$

folgt:

$$\frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^2 - c_n^2} < \sqrt{a_n b_n} - \sqrt{a_n b_n - c_n^2}.$$

Es ist also:

$$f_n < \varphi_n,$$

wenn:

$$\delta = -1$$

gesetzt wird.

Unter der Voraussetzung $a_n > b_n > c_n$ werden dann, wenn a_n, b_n, c_n positive reelle Grössen sind, auch f_n, φ_n, ψ_n positiv reell, ebenso wie aus

den Gleichungen (IV.) die Umkehrung dieser Schlussfolge als richtig sich ergiebt.

Aus den Gleichungen (VI.) in Verbindung mit den oben bewiesenen Gleichungen:

$$\lim a_n = \lim b_n = \lim c_n$$

und

$$\lim f_n = \lim \varphi_n = \lim \psi_n \quad \text{für} \quad \lim n = \infty,$$

folgt ferner unmittelbar, dass auch:

$$\lim a_n = \lim f_n = \lim b_n = \lim \varphi_n = \lim c \ = \lim \psi_n$$

ist und:

$$F(f, \varphi, \psi) = \frac{\mathrm{M}(f, \varphi)\mathrm{M}(f, \psi)}{f} = \lim a_n = \lim b_n = \lim c_n.$$

Gemäss der einfachen Form des Algorithmus (V.) kann passend die Function F, als Function von a, b, c angesehen, das arithmetisch-geometrische Mittel aus den drei Elementen a, b, c genannt werden. Das im Algorithmus unsymmetrisch auftretende Element ist c.

Der erhaltene Satz lässt sich so aussprechen:

Aus drei positiven reellen Grössen a, b, c, die der Ungleichheit $a > b > c$ genügen, bilde man nach dem Algorithmus:

$$2a_1 = \frac{a+b}{2} + c,$$

$$2b_1 = \sqrt{ab} + c,$$

$$2c_1 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})\sqrt{c}$$

drei Grössen a_1, b_1, c_1, und ebenso hieraus drei neue Grössen a_2, b_2, c_2, u. s. w. Bezeichnet man den Grenzwerth, dem sich diese drei Grössen bei fortgesetzter Anwendung desselben Algorithmus annähern, mit $\mathrm{m}(a, b, c)$, *so ist:*

$$\mathrm{m}(a, b, c) = \frac{\mathrm{M}(f, \varphi)\mathrm{M}(f, \psi)}{f} = \frac{\mathrm{M}(f_n, \varphi_n)\mathrm{M}(f_n, \psi_n)}{f_n} = \mathrm{m}(a_n, b_n, c_n),$$

wenn die Grössen f_n, φ_n, ψ_n für jeden Index n definirt sind durch die Gleichungen:

$$f_n = \frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^2 - c_n^2},$$

$$\varphi_n = \sqrt{a_n b_n} - \sqrt{a_n b_n - c_n^2},$$

$$\psi_n = \sqrt{a_n b_n} + \sqrt{a_n b_n - c_n^2}.$$

Das Zeichen M *hat die bekannte Bedeutung des A. G. Mittels aus zwei Elementen.*

Die Grössen f_n, φ_n, ψ_n sind nicht die Glieder des Algorithmus eines Mittels aus zwei Elementen, sondern die Glieder des folgenden:

$$f_{n+1}^2 = \varphi_n \cdot \psi_n,$$

$$2\varphi_{n+1} = (\varphi_n + f_n)\sqrt{\frac{\psi_n}{f_n}},$$

$$2\psi_{n+1} = (\psi_n + f_n)\sqrt{\frac{\varphi_n}{f_n}}.$$

§. 6.

Darstellung der Function m durch elliptische Integrale.

Durch ein Product elliptischer Integrale lässt sich m unmittelbar darstellen.

Nach der bekannten *Gauss*schen Bezeichnung *) ist:

$$\frac{1}{\mathrm{M}(f,\varphi)} = \frac{2}{\pi}\int_{T=0}^{T=\frac{\pi}{2}} \frac{dT}{\sqrt{\varphi\varphi\cos T^2 + ff\sin T^2}},$$

ebenso:

$$\frac{1}{\mathrm{M}(f,\psi)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dT}{\sqrt{\psi\psi\cos T^2 + ff\sin T^2}},$$

demnach:

$$\frac{1}{\mathrm{m}(a,b,c)} = \frac{f}{\mathrm{M}(f,\varphi)\mathrm{M}(f,\psi)}$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dT}{\sqrt{\frac{\varphi\varphi}{f}\cos T^2 + f\sin T^2}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dT}{\sqrt{\frac{\psi\psi}{f}\cos T^2 + f\sin T^2}}.$$

Man erhält die Integrale in der bekannten algebraischen Form, wenn man berücksichtigt, dass:

$$\varphi\varphi\cos T^2 + ff\sin T^2 = \varphi\varphi\left\{1 - \left(1 - \frac{ff}{\varphi\varphi}\right)\sin T^2\right\},$$

so dass also:

$$\frac{1}{\mathrm{M}(f,\varphi)} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\varphi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dT}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{ff}{\varphi\varphi}\right)\sin T^2}}$$

wird; oder, da:

$$\frac{1}{\mathrm{M}(f,\varphi)} = \frac{1}{\mathrm{M}\left(1, \frac{f}{\varphi}\right)}\cdot\frac{1}{\varphi},$$

*) *Gauss'* Werke. Bd. III, pag. 352.

so wird:

$$\frac{1}{\mathrm{M}\left(1, \frac{f}{\varphi}\right)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dT}{\sqrt{1-\left(1-\frac{ff}{\varphi\varphi}\right)\sin T^2}},$$

und, wenn man $\sin T^2 = x$ setzt, so folgt:

$$\frac{1}{\mathrm{M}\left(1, \frac{f}{\varphi}\right)} = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)\left(1-\left\{1-\frac{ff}{\varphi\varphi}\right\}x\right)}}.$$

analog:

$$\frac{1}{\mathrm{M}\left(1, \frac{f}{\psi}\right)} = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)\left(1-\left\{1-\frac{ff}{\psi\psi}\right\}x\right)}}.$$

Führen wir die *Jacobi*sche Bezeichnungsweise ein, und setzen

$$\frac{f}{\varphi} = k', \quad \frac{f}{\psi} = l',$$

definiren die Grössen k und l durch die Gleichungen:

$$kk+k'k' = 1, \quad ll+l'l' = 1,$$

bezeichnen ferner mit K und L die ganzen elliptischen Integrale:

$$2K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-kkx)}},$$

$$2L = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-llx)}},$$

so ist:

$$\frac{1}{\mathrm{M}\left(1, \frac{f}{\varphi}\right)} = \frac{2}{\pi}.K, \quad \frac{1}{\mathrm{M}\left(1, \frac{f}{\psi}\right)} = \frac{2}{\pi}L,$$

also:

$$\text{(VII.)} \quad \frac{1}{\mathrm{m}(a, b, c)} = \frac{f}{\varphi.\psi}.\frac{1}{\mathrm{M}\left(1, \frac{f}{\varphi}\right)}.\frac{1}{\mathrm{M}\left(1, \frac{f}{\psi}\right)} = \frac{4}{\pi^2}.\frac{f}{\varphi.\psi}.K.L.$$

Die Analogie aber des Mittels $\mathrm{m}(a, b, c)$ mit einem Mittel aus zwei Elementen, das durch das reelle ganze elliptische Integral erster Gattung darstellbar ist, zeigt sich deutlicher, wenn m durch die nächst höheren transcendenten Integrale, also durch die reellen ganzen hyperelliptischen Integrale erster Gattung dargestellt wird.

Dies ist mit Hülfe der folgenden *Jacobi*schen Reduction ausführbar:

Jacobi hat im VIII. Bande dieses Journals (unter den: „Nachrichten von Büchern“ pag. 416) eine Verallgemeinerung eines *Legendre*schen Theorems *) über die Zurückführung gewisser immer endlich bleibender hyperelliptischer Integrale auf elliptische Integrale erster Gattung gegeben. Die von *Jacobi* dort aufgestellten Formeln enthalten den interessanten Satz:

„Der reelle Theil, sowie der Factor des imaginären Theiles des Werthes eines elliptischen Integrals erster Gattung mit complexem Modul lassen sich je durch ein hyperelliptisches Integral ausdrücken, und es sind dies die zwei von einander linear unabhängigen hyperelliptischen Integrale erster Gattung (nach der *Riemann*schen Bezeichnungsweise)“.

Aus diesem Satze ergiebt sich dann, dass das eine dieser hyperelliptischen Integrale durch die Summe zweier elliptischer Integrale, das andere durch die Differenz derselben beiden elliptischen Integrale darstellbar ist.

Eine weitere Ausdehnung dieses letzteren Theorems hat vor kurzem Herr *Hermite* gegeben **). Herr *Hermite* spricht das Theorem in folgender Weise aus (statt der dort angewandten Buchstaben a, b sind m, n gesetzt, um hier durchgängig dieselbe Bezeichnungsweise beibehalten zu können):

„Wenn

$$R(z) = z(1-z)(1-mnz)(1+mz)(1+nz)$$

gesetzt wird, so erhält man durch die Substitution:

$$\sqrt{z} = \frac{(k'+l')\sin\varphi}{\sqrt{1-kk\sin\varphi^2}+\sqrt{1-ll\sin\varphi^2}} \text{ ***)}$$

die Gleichungen:

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = \frac{k'+l'}{2}\left\{\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-kk\sin\varphi^2}}+\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-ll\sin\varphi^2}}\right\},$$

$$\int_0^z \frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}} = \frac{(k'+l')^2}{2(l'-k')}\left\{\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-kk\sin\varphi^2}}-\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-ll\sin\varphi^2}}\right\}.$$

Die Grössen k, l, k', l' sind Functionen von m, n und definirt durch

---

*) *Legendre:* Théorie des fonctions elliptiques. IIIème supplément. §. XII. Paris 1832.

**) Annales de la Société scientifique de Bruxelles. Ire année, 1876.

***) In Folge eines Druckfehlers ist in diesem Journal Band VIII p. 416, wie in der Abhandlung von *Hermite* der Factor $\sin\varphi$ im Zähler ausgelassen.

die Gleichungen:

$$k = \frac{\sqrt{n}+\sqrt{m}}{\sqrt{1+n}\sqrt{1+m}}, \quad l = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{m}}{\sqrt{1+n}\sqrt{1+m}},$$

$$k' = \frac{1-\sqrt{nm}}{\sqrt{1+n}\sqrt{1+m}}, \quad l' = \frac{1+\sqrt{nm}}{\sqrt{1+n}\sqrt{1+m}},$$

aus denen sich ergiebt:

$$kk+k'k' = 1, \quad ll+l'l' = 1.$$

Mit Hülfe dieser Transformation lassen sich die Werthe sämmtlicher zwischen zwei Nullwerthen von $R(z)$ erstreckter hyperelliptischer Integrale durch ganze elliptische Integrale ausdrücken, wie entweder durch genaue Discussion der Transformationsgleichung, oder mit Hülfe der Theorie der *Riemann*schen Flächen abzuleiten ist. Es soll im Folgenden das letztere geschehen, da eine solche Relation zwischen den zweiblättrigen Flächen elliptischer und hyperelliptischer Integrale, wie sie der obige *Jacobi*sche Satz vermuthen lässt, vielleicht sonst nicht untersucht ist. Ausserdem wird uns die Theorie der Flächen mit Nothwendigkeit auf die Transformationsgleichung in ihrer allgemeinsten Gestalt führen.

§. 7.

Um eine Fläche zu erhalten, in welcher die Quadratwurzel einer ganzen rationalen Function eindeutig ist, sind die beiden Blätter der Fläche längs Linien der Durchsetzung, die von einem Windungspunkte zu einem anderen führen, zu verbinden, d. h. es ist das untere Blatt, so wie das obere längs übereinanderliegender Linien, von einem Nullwerthe der ganzen rationalen Function zu einem andern, aufzuschneiden, und dann je ein Rand des Schnittes im oberen Blatte mit einem Rande des Schnittes im unteren Blatte kreuzweise zu verbinden. Eine Linie der Durchsetzung, die in solcher Weise gebildet ist, soll eine „*einfache*“ heissen.

Der Grad des Zusammenhangs der Flächen unterliegt folgenden Gesetzen:

I. Eine $(n+1)$-fach zusammenhängende Fläche (d. h. eine Fläche, in welcher sich höchstens n geschlossene Linien ziehen lassen, die weder einzeln noch zusammengenommen die vollständige Begrenzung eines Flächenstücks bilden) wird durch jeden *Querschnitt* (d. h. durch eine Linie, die von einem Punkte der Begrenzung der Fläche durch sie hindurch bis zu einem

anderen Begrenzungspunkte führt) in eine n-fach zusammenhängende verwandelt, wenn der Querschnitt die Fläche nicht zerstückelt*).

Dieser Satz gestattet eine Umkehrung:

II. Wird eine Fläche durch m verschiedene Querschnitte, deren keiner die Fläche zerstückelt, in eine n-fach zusammenhängende verwandelt, so war die ursprüngliche Fläche $(n+m)$-fach zusammenhängend.

Ferner werden die folgenden Sätze über die Zusammensetzung mehrerer Flächen Anwendung finden.

III. Es seien F, F' zwei n- resp. m-fach zusammenhängende Flächen. Wenn diese längs $(\nu+2)$ Linien, welche die etwa schon vorhandenen Durchsetzungslinien nicht berühren, so verbunden werden, dass $(\nu+2)$ neue, einfache Durchsetzungslinien, nach der oben definirten Weise, entstehen, so erhält man eine $(n+m+2\nu+1)$-fach zusammenhängende Fläche.

Beweis: Der Grad des Zusammenhangs der neu entstehenden Fläche, $F+F'$, *so weit* er von den $(\nu+2)$ durch die Verbindung von F und F' gebildeten einfachen Durchsetzungslinien abhängt, ist derselbe, wie der einer zweiblättrigen Fläche mit $(\nu+2)$ Durchsetzungslinien. Denn in einer solchen zweiblättrigen Fläche sind diese $(\nu+2)$ Linien der Durchsetzung sämmtlich einfache. Ist die Anzahl derselben zwei, wie in der Fläche eines elliptischen Integrals, so sind bekanntlich zwei Querschnitte nöthig, um die Fläche in eine einfach zusammenhängende zu verwandeln, jede weitere Linie der Durchsetzung erfordert weitere zwei Querschnitte, allgemein, wenn die Anzahl der Durchsetzungslinien $(\nu+2)$ ist, so wird die Fläche durch $(2\nu+2)$ Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandelt. Werden also in unserer Fläche $(F+F')$ diese $(2\nu+2)$ Querschnitte gezogen, so erhalten wir eine Fläche, zu derem Zusammenhangs-Grade die $(\nu+2)$ Durchsetzungslinien keinen Beitrag mehr liefern. In der Fläche lassen sich aber noch, da F n-fach, F' m-fach zusammenhängend war, $(n-1)+(m-1)$ geschlossene Curven ziehen, die ein Flächenstück noch nicht vollkommen begrenzen. Diese Fläche mit den $(2\nu+2)$ Querschnitten ist also noch $\{(n-1)+(m-1)+1\}$-fach zusammenhängend. Also ist nach II. die ursprüngliche Fläche $(F+F')$ ohne die $(2\nu+2)$ Querschnitte $2\nu+2+(n-1)+(m-1)+1=(n+m+2\nu+1)$-fach zusammenhängend.

IV. Sind zwei begrenzte Flächen F, F', n- resp. m-fach zusammen-

---

*) *Riemann:* Theorie der *Abel*schen Functionen. Dieses Journal. 1857. Bd. 54.

hängend, und werden sie längs eines Theiles ihrer Begrenzung aneinander gelegt, so entsteht eine $(n+m-1)$-fach zusammenhängende Fläche, wenn längs des gemeinsamen Theils der Begrenzung die Flächen mit einander verbunden werden.

Beweis: Es seien in F die $(n-1)$, in F' die $(m-1)$ Curven gezogen, die kein Flächenstück vollkommen begrenzen gemäss der Voraussetzung, so muss jede weitere geschlossene Curve, die nicht durch die entstandene Verbindungsstelle der beiden Flächen geht, entweder in F oder in F' die vollständige Begrenzung eines Flächentheils bilden, ebenfalls nach der Voraussetzung. Geht eine geschlossene Curve a durch die Verbindungsstelle, so muss sie, da sie geschlossen sein soll, jedenfalls eine gerade Anzahl Male hindurchgehen. Sie lässt sich also durch Linien, die in der Verbindungsstelle von einem Punkte der Curve a bis zu einem andern gezogen werden, in geschlossene Linien zerlegen, die theils in F, theils in F' liegen. Diese müssen also, da in F schon $(n-1)$ Curven, in F' $(m-1)$ Curven gezogen sind, ein Flächenstück vollständig begrenzen, also muss auch die Curve a dieselbe Eigenschaft haben. Es ergiebt sich daher, dass ausser den $(n-1)+(m-1)$ Curven eine jede andere mit diesen einen Theil der Fläche vollkommen umschliesst, d. h. die Fläche ist: $(n-1)+(m-1)+1=(n+m-1)$-fach zusammenhängend.

Der Satz IV. lässt sich verallgemeinern:

V. Wird unter denselben Voraussetzungen wie in IV. eine Begrenzungslinie von F an ν verschiedenen Stellen einer und derselben Begrenzungslinie von F' angelegt, so entsteht eine $(n+m+\nu-2)$-fach zusammenhängende Fläche.

Beweis: Fällt eine Begrenzungslinie von F mit einer Begrenzung von F' an zwei verschiedenen Stellen zusammen, so entsteht ein geschlossenes Gebiet A, das nicht zur Fläche gehört. Ausser den geschlossenen Curven: $(n-1)$ in F, $(m-1)$ in F' können wir also noch eine Curve a_1 ziehen, nämlich um dieses Gebiet A, so dass kein Flächenstück durch a_1 vollständig begrenzt wird. Von jeder weiteren geschlossenen Curve aber lässt sich, wenn sie nur durch eine der beiden Verbindungsstellen hindurchgeht, genau wie in Satz IV. zeigen, dass sie ein Flächenstück vollkommen begrenzt, eventuell mit Hinzuziehung der schon gezogenen Curven. Geht eine geschlossene Curve um das Gebiet A herum, so umschliesst sie mit Hülfe von a_1 ein Flächenstück. Es ergiebt sich also: ausser den

$(n-1)+(m-1)+1=n+m-1$ Curven umschliesst jede andere geschlossene Curve vollständig ein Flächenstück; d. h. die Fläche ist $n+m=(n+m+2-2)$-fach zusammenhängend. Ist die Anzahl der Verbindungsstellen der beiden Flächen längs derselben Begrenzungslinien gleich 3, so entstehen zwei geschlossene Gebiete, die nicht zur Fläche gehören. Es können also ausser den $(n-1+m-1)$ Curven noch zwei gezogen werden, die ein Flächenstück nicht umschliessen. Dieselbe Schlussweise wie oben zeigt, dass keine weitere Curve möglich ist, die diese Eigenschaft hat, demnach ist die Fläche $n-1+m-1+2+1=(n+m+3-2)$-fach zusammenhängend. Dies fortgesetzt, führt zu dem Satze V.

§. 8.

Construction einer Fläche, in der zwei elliptische Integrale mit verschiedenen Moduln eindeutig und stetig sind.

Der Werth des elliptischen Integrals:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-kkx)}}$$

ist eine eindeutige und stetige Function des Ortes in einer zweiblättrigen *Riemann*schen Fläche, in welcher die beiden Blätter in einfachen Linien der Durchsetzung von dem Punkte $x=\infty$ bis $x=0$ und von $x=1$ bis $x=\frac{1}{kk}$ verbunden sind. Um die Punkte $x=1$ und $x=\frac{1}{kk}$ ist ein Querschnitt ganz im oberen Blatte verlaufend gezogen, ein zweiter um die Punkte $x=0$ und $x=1$, theils im oberen, theils im unteren Blatte verlaufend. Ohne die Lage der Durchsetzungslinien zu ändern lege man diese zweiblätterige Fläche zweimal auf einander, so dass man vier Blätter I, II, III, IV erhält. Man schneide alle vier Blätter längs einer Linie, von dem Punkte A bis zum Punkte B, auf, und verbinde dann die Ränder des Schnittes in den verschiedenen Blättern so, dass die Blätter I und III längs einer einfachen Linie der Durchsetzung, in der oben definirten Weise, verbunden sind, und ebenso die Blätter II und IV. Diese beiden Linien der Durchsetzung seien der Kürze halber bezeichnet mit $D(A, B)$. Die neue vierblättrige Fläche ist dann *dreifach* zusammenhängend; denn sie ist entstanden durch die Verbindung zweier einfach zusammenhängender Flächen vermittelst zweier einfacher Linien der Durchsetzung: der $D(A, B)$ in den Blättern I, III und in den Blättern II, IV. Aus der Formel des obigen

Satzes III folgt also:

$$n+m+2\nu+1 = 1+1+0+1 = 3.$$

Der eine Endpunkt A der beliebig angenommenen $D(A, B)$ werde nun als Windungspunkt eines neuen Integrals genommen, dessen übrige Windungspunkte mit den Punkten $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$ übereinstimmen. Ein solches Integral ist:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-llx)}},$$

und es sei nun $A = \frac{1}{ll}$. Den anderen Endpunkt B der Durchsetzungslinie $D(A, B)$ lasse man mit dem Punkte $x = \frac{1}{kk}$ zusammenfallen. Dadurch erhält dann die Fläche, die in Figur I. und II. angegebene Gestalt (abgesehen von dem noch zu ziehenden Querschnitte c). Fig. I. stellt die Fläche der Blätter I und II dar, Fig. II. die der Blätter III und IV. Die ***letztere liegt unter der ersteren,*** und zwar die Punkte unter einander, in denen x denselben Werth hat. Die römischen Ziffern an den Seiten der Durchsetzungslinien geben an, welche Blätter die Durchsetzungslinie verbindet, die arabischen Ziffern dienen zur Unterscheidung der beiden Seiten der Durchsetzungslinien.

In der entstandenen Fläche sind die Punkte $x = 1,\ 0,\ \infty,\ \frac{1}{kk},\ \frac{1}{ll}$ Windungspunkte erster Ordnung. Für die Punkte $x = 1,\ 0,\ \infty$ folgt dies unmittelbar: sie waren Windungspunkte erster Ordnung in den beiden ursprünglichen Flächen und sie sind in der neuen Fläche ungeändert geblieben. Von dem Punkte $\frac{1}{ll}$ gehen zwei Linien der Durchsetzung aus, die $D\left(\frac{1}{ll}, \frac{1}{kk}\right)$, welche die Blätter I und III verbindet, und die $D\left(\frac{1}{ll}, \frac{1}{kk}\right)$, welche II und IV verbindet. Geht man also z. B. vom Blatte I aus, so führt ein einmaliger Umgang um $\frac{1}{ll}$ in das Blatt III und erst der zweite Umgang zum Ausgangspunkte zurück. Ebenso verhält es sich, wenn man mit Hülfe der $D\left(\frac{1}{ll}, \frac{1}{kk}\right)$ in den Blättern II und IV diese beiden Blätter zu einem zweimaligen Umgange um $\frac{1}{ll}$ benutzt. Der Punkt $\frac{1}{ll}$ hat daher die charakteristische Eigenschaft eines Windungspunktes erster Ordnung: erst ein zweimaliger Umgang um ihn führt zu demselben Punkte der

Fläche zurück. Von dem Punkte $\frac{1}{kk}$ gehen vier Linien der Durchsetzung aus:

1) $D\left(\frac{1}{ll}, \frac{1}{kk}\right)$ in den Blättern I, III,

2) $D\left(\frac{1}{ll}, \frac{1}{kk}\right)$ - - - II, IV,

3) $D\left(1, \frac{1}{kk}\right)$ - - - I, II,

4) $D\left(1, \frac{1}{kk}\right)$ - - - III, IV,

also in je zwei Blättern nur eine Durchsetzungslinie. Es führt auch hier erst ein zweimaliger Umgang zum Ausgangspunkte zurück: man gehe z. B. vom Blatte I aus, die $D\left(1, \frac{1}{kk}\right)$ führt in II, dann die $D\left(\frac{1}{kk}, \frac{1}{ll}\right)$ in IV; ein Umgang ist vollendet, die Wurzel $\sqrt{x(1-x)(1-kkx)}$ hat den entgegengesetzten Werth; die beim Weitergehen getroffene $D\left(1, \frac{1}{kk}\right)$ führt in das Blatt III, dann die $D\left(\frac{1}{kk}, \frac{1}{ll}\right)$ wieder in Blatt I, die Wurzel hat wieder denselben Werth. Ein solcher zweimaliger Umgang um $\frac{1}{kk}$ führt also in alle vier Blätter, in jedem derselben geht man zur Hälfte um $\frac{1}{kk}$ herum, wenigstens in der schematischen Figur. Der Punkt $\frac{1}{kk}$ ist daher ebenfalls ein Windungspunkt erster Ordnung.

Die Fläche ist ferner in Folge der für die Lage der Punkte A, B getroffenen Bestimmung nur noch *zweifach* zusammenhängend. Wir können sie uns nämlich entstanden denken durch Verbindung der beiden ursprünglichen einfach zusammenhängenden zweiblättrigen Flächen an zwei Stellen *derselben* Begrenzung: Die Begrenzung dieser beiden Flächen wird von den beiden Querschnittsystemen gebildet. Anstatt nun den Theil des in der Figur mit b_1 bezeichneten Querschnittes, welcher durch $D\left(1, \frac{1}{kk}\right)$ hindurch geht, in die Begrenzung aufzunehmen, können wir auch, ohne den Charakter der Fläche zu ändern, die Punkte $\frac{1}{kk}$ und $\frac{1}{ll}$, in der Weise, wie es Fig. III. zeigt, in die Begrenzung hineinziehen, indem wir durch beide Punkte sowohl im Blatte I, wie im Blatte II den Querschnitt b_1 ziehen. Ebenso möge der Querschnitt b_2 durch dieselben Punkte in den Blättern III

und IV gezogen sein. Die $D\left(\frac{1}{kk}, \frac{1}{ll}\right)$ kann nun angesehen werden, als entstanden durch die Verbindung:

1) des Theiles der Begrenzungslinie der Fläche Fig. I, welcher durch die Punkte $\frac{1}{kk}$ und $\frac{1}{ll}$ im Blatte I geht, mit dem durch dieselben beiden Punkte im Blatte III gehenden Theile der Begrenzung der Fläche Fig. II;

2) durch die Verbindung derjenigen Theile *derselben* beiden Begrenzungslinien, welche durch die Punkte $\frac{1}{kk}$, $\frac{1}{ll}$ gehend, im Blatte II resp. IV liegen.

Längs dieser beiden Verbindungsstellen mögen die Theile der Begrenzungslinien fortfallen, so erhalten wir wieder die obige Fläche, und die Begrenzung reducirt sich auf die beiden Systeme der Querschnitte. Als Grad des Zusammenhangs der Fläche giebt also die Formel des obigen Satzes (V.):

$$n+m+\nu-2 = 1+1+2-2 = 2.$$

Diese zweifach zusammenhängende Fläche wird nun nach dem Satze I in eine einfach zusammenhängende verwandelt, wenn wir zwei Punkte der beiden Begrenzungen, d. h. der Querschnittsysteme in den Blättern I, II resp. III, IV mit einander verbinden. Dies möge geschehen durch einen Querschnitt c (siehe Fig. I. und II.), welcher von dem Durchschnittspunkte der mit a_1 und b_1 bezeichneten Querschnitte im Blatte II ausgeht und in dem Durchschnittspunkte von a_2, b_2 im Blatte IV endigt, nachdem er mit Hülfe der Durchsetzungslinie $D\left(\frac{1}{kk}, \frac{1}{ll}\right)$ vom Blatte II in das Blatt IV gelangt ist.

Die dann erhaltene Fläche besitzt also die Eigenschaften:

1) Sie enthält, wie oben gezeigt, als Windungspunkte erster Ordnung sämmtliche Punkte, für welche die beiden Werthe der Wurzel:

$$\sqrt{x(1-x)(1-kkx)} \quad \text{und} \quad \sqrt{x(1-x)(1-llx)}$$

zusammenfallen; sie besitzt keine anderen Windungspunkte.

2) Sie ist einfach zusammenhängend. Daraus folgt also, dass in ihr die Integrale

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-kkx)}} \quad \text{und} \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-llx)}}$$

eindeutige und stetige Functionen des Ortes der Fläche sind.

§. 9.

Zusammenhang der construirten Fläche mit der Fläche hyperelliptischer Integrale.

Nach dem Schlusssatze des vorigen Paragraphen ist auch jede eindeutige und stetige Function der beiden elliptischen Integrale erster Gattung mit den Moduln k und l eine eindeutige und stetige Function des Ortes der construirten Fläche, also z. B. die lineare Function:

$$H(x) = c_1\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-kkx)}} + c_2\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-llx)}},$$

wenn c_1 und c_2 Constanten bedeuten.

Als Function des Ortes der Fläche hat H ferner eine wichtige Eigenschaft: Es fallen die beiden Werthe derselben, nämlich die positiven und negativen Werthe der Wurzelgrössen in den Integralen, in sechs Punkten der Fläche zusammen, in den Punkten:

$x = 0,\ 1,\ \infty$ in den Blättern I und II

$x = 0,\ 1,\ \infty$ in den Blättern III und IV.

Dies findet nicht statt für die Werthe

$$x = \frac{1}{kk} \quad \text{und} \quad x = \frac{1}{ll},$$

da für diese entweder nur die beiden Werthe von $\sqrt{x(1-x)(1-kkx)}$ oder nur von $\sqrt{x(1-x)(1-llx)}$ zusammenfallen.

Diese Eigenschaft der Function H leitet darauf hin, einen Zusammenhang derselben mit einem hyperelliptischen immer endlich bleibenden Integrale aufzusuchen, also einem Integrale von der Form:

$$\int_0^z \frac{a_1 + a_2 z}{\sqrt{R(z)}}\,dz,$$

wenn a_1, a_2 Constanten sind, und $R(z)$ eine ganze rationale Function fünften oder sechsten Grades ist. Dieses Integral hat die analogen Eigenschaften in einer Fläche der Variabeln z. Man erhält diese Fläche (siehe Fig. IV.) bekanntlich durch wiederholte Anwendung der für die Fläche eines elliptischen Integrals dienenden Regeln. Darnach sind für die zweiblättrige Fläche mit sechs Windungspunkten erforderlich:

α) Drei Durchsetzungslinien zwischen den Windungspunkten.

β) Zwei Paare von Querschnitten: a_1, b_1 und a_2, b_2, deren positive und negative Seiten so liegen mögen, dass ein positiv durchlaufener Querschnitt a (d. h. so durchlaufen, dass die umschlossene Fläche zur Linken liegt) von

der negativen zur positiven Seite von b führt, ein zweiter Innenlaufender Querschnitt b von der positiven zur negativen Seite von a.

γ) Ein offener Querschnitt c, der die beiden Paare a, b verbindet.

In einer solchen Fläche, die mit $T(z)$ bezeichnet sei, ist das hyperelliptische Integral eindeutig und stetig, und für sechs verschiedene Werthe von z fallen die beiden Werthe der Wurzel $\sqrt{R(z)}$ zusammen.

Es muss also der obige Ausdruck H auf die Form eines solchen hyperelliptischen Integrals gebracht werden können, wenn es möglich ist, H als eine eindeutige und stetige Function einer Variabeln z darzustellen in einer zweiblättrigen Fläche, die mit der obigen $T(z)$ übereinstimmt, und ferner wenn umgekehrt der Ort dieser Fläche eindeutig und stetig mit den Werthen von H sich ändert. Dieses wird erreicht durch die Lösung der Aufgabe: Eine Function z von x so zu bestimmen, dass z, in der Fläche $T(z)$ erstreckt, eine eindeutige und stetige Function der Variabeln x ist in der vierblättrigen Fläche, die mit $T(x)$ bezeichnet sei, und auch umgekehrt x eindeutig und stetig von z abhängt, so dass also die obige *vierblättrige Fläche* auf eine zweiblättrige mit sechs Windungspunkten in gegenseitiger eindeutiger Beziehung abgebildet wird.

Die Form jener Transformationsfunction z von x ergiebt sich leicht:

Die Fläche $T(x)$ ist vierblättrig. Zu jedem Punkte derselben soll ein Punkt der Fläche $T(z)$, also zu vier übereinanderliegenden Punkten in $T(x)$, d. h. zu einem Werthe von x, vier Punkte in $T(z)$ gehören. Zwei derselben mögen im unteren, zwei darüber im oberen Blatte in $T(z)$ liegen: d. h. also, zu einem Werthe von x sollen zwei Werthe von z gehören. Umgekehrt, zweien übereinanderliegenden Punkten in $T(z)$, d. h. einem Werthe von z sollen zwei Punkte in $T(x)$ entsprechen. Diese müssen dann, wie sich leicht ergiebt, ebenfalls übereinanderliegen, d. h. dann also, einem Werthe von z entspricht ein Werth von x. Ausserdem soll z sich stetig mit x, und umgekehrt x stetig mit z sich ändern. Diesen Bedingungen wird genügt, wenn z eine algebraische Function von x ist, so dass:

$$F(\overset{2}{z}, \overset{1}{x}) = 0$$

oder ausgeschrieben:

$$\text{(VIII.)} \qquad zz(a_1 x + b_1) + z(a_2 x + b_2) + (a_3 x + b_3) = 0.$$

Die sechs Coefficienten sind theilweise durch die auftretenden Bedingungen zu bestimmen:

1) Für die Werthe:

$$x = \frac{1}{kk}, \quad x = \frac{1}{ll}$$

fallen alle vier übereinanderliegenden Punkte der x-Fläche zusammen, es müssen also auch für diese Werthe die beiden zu einem x gehörenden Werthe von z zusammenfallen, da einem Punkte in $T(x)$ auch nur ein Punkt in $T(z)$ entsprechen soll.

Es müssen also die beiden Gleichungen erfüllt sein:

$$F\left(z, \frac{1}{kk}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{x=\frac{1}{kk}} = 0,$$

$$F\left(z, \frac{1}{ll}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{x=\frac{1}{ll}} = 0.$$

Daraus folgen die Gleichungen:

$$\text{(IX.)} \quad \begin{cases} 4(a_1+b_1 kk)(a_3+b_3 kk) = (a_2+b_2 kk)^2, \\ 4(a_1+b_1 ll)(a_3+b_3 ll) = (a_2+b_2 ll)^2. \end{cases}$$

2) Analog der Form, in der die elliptischen Integrale angenommen sind, wollen wir auch die Form des hyperelliptischen Integrals so wählen, dass im Nenner die Wurzel einer ganzen rationalen Function ungerader Potenz, also der fünften steht. Hierdurch geschieht der Allgemeinheit kein Abbruch, da durch eine geeignete Transformation bekanntlich dieses Integral in ein solches verwandelt werden kann, welches sechs im endlichen liegende Windungspunkte besitzt. Wir nehmen also an, dass die Punkte $z = 0$ und $z = \infty$ Windungspunkte der Fläche $T(z)$ sind. Dann folgt, dass auch die entsprechenden Punkte der Fläche $T(x)$ Windungspunkte sein müssen, damit eben der Ort der Fläche $T(x)$ eindeutig von dem Orte der Fläche $T(z)$ abhängt. Es sind aber die zu den obigen Werthen von z gehörenden Werthe von x:

$$\text{zu} \quad z = 0, \quad x = -\frac{b_3}{a_3},$$

$$\text{zu} \quad z = \infty, \quad x = -\frac{b_1}{a_1}.$$

Es müssen also diese Werthe von x gleich einem der Werthe: $0, 1, \infty$ sein.

Wir treffen nun die folgende Vereinfachung: Es soll zu dem Nullwerthe der Variabeln z der Nullwerth von x gehören. Hierdurch wird der Aufgabe der Zusammensetzung der elliptischen Integrale zu einem hyperelliptischen keine wesentliche Beschränkung auferlegt, da der Null-

punkt der z-Ebene, wenn er ursprünglich nicht diese Lage hätte, durch eine lineare Transformation in den gewünschten Punkt verschoben werden kann.

Wir setzen also: $b_3 = 0$.

Wird dann die Transformation vollständig durchgeführt, und stellen wir die weitere Bedingung, dass die Summe sowie die Differenz der beiden elliptischen Integrale je einem der beiden von einander linear unabhängigen, immer endlich bleibenden hyperelliptischen Integralen gleich sein soll (denn in dieser Form nur kann die Transformation unserm Zwecke dienen), so ergiebt sich die Bedingungsgleichung:

$$b_1 = 0.$$

Dann gehören also zu $x = 0$ die beiden Werthe $z = 0$ und $z = \infty$. Die Gleichungen (IX.) erhalten die Form:

$$4a_1 a_3 = (a_2 - b_2 kk)^2,$$
$$4a_1 a_3 = (a_2 - b_2 ll)^2,$$

aus denen sich ergiebt:

$$\pm 1 = \frac{a_2 - b_2 kk}{a_2 - b_2 ll}.$$

Es kann hier nur das untere, negative Zeichen angewandt werden, da vorausgesetzt ist: $k \gtrless l$; es folgt daher:

$$2a_2 = -b_2(kk + ll),$$

und aus den obigen Gleichungen wird:

$$16 a_1 a_3 = b_2 b_2 (kk - ll)^2.$$

Werden diese Werthe in (VIII.) eingesetzt, so ergiebt sich:

$$zz a_1 x + b_2 z\left(1 - x\frac{kk - ll}{2}\right) + x\frac{b_2 b_2}{16 a_1}(kk - ll)^2 = 0$$

oder:

$$zz\left(\frac{4a_1}{b_2}\right)^2 \cdot x + \frac{4a_1}{b_2} \cdot 2z(2 - x(kk + ll)) + x(kk - ll)^2 = 0.$$

Setzt man:

$$\frac{4a_1}{b_2} = -\mu,$$

so erhält die Gleichung die Form:

$$(\text{VIII}^2.) \qquad zz\mu\mu x - 2\mu z(2 - x(kk + ll)) + x(kk - ll)^2 = 0.$$

Die Auflösung nach x ergiebt:

$$x = \frac{4z \cdot \frac{\mu}{(kk - ll)^2}}{1 + 2\mu z \frac{kk - ll}{(kk - ll)^2} + \frac{zz\mu\mu}{(kk - ll)^2}}$$

oder wenn man setzt:

$$\alpha = \frac{\mu}{(k-l)^2}, \quad \beta = \frac{\mu}{(k+l)^2},$$

woraus folgt:

$$\alpha+\beta = 2\mu.\frac{kk+ll}{(kk-ll)^2}, \quad \alpha\beta = \frac{\mu\mu}{(kk-ll)^2},$$

so wird:

$$\text{(X.)} \qquad x = \frac{4\alpha\beta z}{\mu(1+\alpha z)(1+\beta z)}.$$

(In einer ähnlichen Form benutzt Herr *Hermite* in der oben citirten Abhandlung die Transformationsgleichung als Ausgangspunkt der weiteren Untersuchungen.)

Mit Hülfe der Identität:

$$4 \equiv (k'+l')^2+(k'-l')^2+2(kk+ll)$$

und der Gleichungen:

$$\mu\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = 2(kk+ll), \quad \frac{\mu\mu}{\alpha\beta} = (k'+l')^2(k'-l')^2 = (kk-ll)^2$$

ergiebt sich:

$$1-x = \frac{\alpha\beta\{\mu z-(k'+l')^2\}\{\mu z-(k'-l')^2\}}{\mu\mu\{1+\alpha z\}\{1+\beta z\}},$$

$$1-kkx = \frac{\alpha\beta\{\mu z-(kk-ll)\}^2}{\mu\mu\{1+\alpha z\}\{1+\beta z\}} = \frac{(1-z\sqrt{\alpha\beta})^2}{(1+\alpha z)(1+\beta z)},$$

$$1-llx = \frac{\alpha\beta\{\mu z+(kk-ll)\}^2}{\mu\mu\{1+\alpha z\}\{1+\beta z\}} = \frac{(1+z\sqrt{\alpha\beta})^2}{(1+\alpha z)(1+\beta z)}.$$

Setzt man:

$$R(z) = z(1+\alpha z)(1+\beta z)(\mu z-(k'+l')^2)(\mu z-(k'-l')^2),$$

so folgt aus den obigen Gleichungen:

$$\frac{1}{\sqrt{x(1-x)(1-kkx)}} = \frac{1}{\sqrt{R(z)}}.\frac{\mu^{\frac{3}{2}}(1+\alpha z)^2(1+\beta z)^2}{2\alpha\beta.(1-z\sqrt{\alpha\beta})},$$

$$\frac{1}{\sqrt{x(1-x)(1-llx)}} = \frac{1}{\sqrt{R(z)}}.\frac{\mu^{\frac{3}{2}}(1+\alpha z)^2(1+\beta z)^2}{2\alpha\beta.(1+z\sqrt{\alpha\beta})},$$

oder, wenn man der Kürze halber setzt:

$$x(1-x)(1-kkx) = \mathfrak{R}(x,k),$$

$$x(1-x)(1-llx) = \mathfrak{R}(x,l),$$

so ergeben sich mit Hülfe von:

$$dx = \frac{4\alpha\beta}{\mu} \cdot \frac{1-\alpha\beta z}{(1+\alpha z)^2(1+\beta z)^2}\, dz$$

die Gleichungen:

$$\frac{dx}{\sqrt{\Re(x,k)}} = \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} \cdot 2\sqrt{\mu}(1+z\sqrt{\alpha\beta}),$$

$$\frac{dx}{\sqrt{\Re(x,l)}} = \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} \cdot 2\sqrt{\mu}(1-z\sqrt{\alpha\beta}),$$

aus denen folgt:

$$\text{(XI.)} \quad \begin{cases} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\Re(x,k)}} + \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\Re(x,l)}} = 4\sqrt{\mu} \cdot \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}, \\ \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\Re(x,k)}} - \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\Re(x,l)}} = 4\sqrt{\mu}\sqrt{\alpha\beta} \cdot \int_0^z \frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}}. \end{cases}$$

Setzt man allgemein:

$$R(z) = c(z)(z-m_1)(z-m_2)(z-m_3)(z-m_4),$$

worin c eine Constante bedeutet, so dass also in unserem Falle:

$$m_1 = -\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{\mu}(k-l)^2$$

$$m_2 = -\frac{1}{\beta} = -\frac{1}{\mu}(k+l)^2$$

$$m_3 = \frac{1}{\mu}(k'-l')^2$$

$$m_4 = \frac{1}{\mu}(k'+l')^2$$

wird, so folgt daraus:

$$m_1 . m_2 = \frac{1}{\mu\mu}(kk-ll)^2 = \frac{1}{\mu\mu}(k'k'-l'l')^2 = m_3 . m_4.$$

Man erhält also für die vier im Endlichen liegenden Windungspunkte m_1, m_2, m_3, m_4 eines hyperelliptischen Integrals die für die Zurückführung desselben auf elliptische Integrale nothwendige Bedingungsgleichung

$$m_1 . m_2 - m_3 . m_4 = 0.$$

Diese Gleichung erweist sich auch als hinreichend:

Es folgt aus den obigen Gleichungen:

$$k = \frac{i}{2}\sqrt{\mu}\{\sqrt{m_2}+\sqrt{m_1}\},$$

$$l = \frac{i}{2}\sqrt{\mu}\{\sqrt{m_2}-\sqrt{m_1}\},$$

$$k' = \tfrac{1}{2}\sqrt{\mu}\{\sqrt{m_4}+\sqrt{m_3}\},$$

$$l' = \tfrac{1}{2}\sqrt{\mu}\{\sqrt{m_4}-\sqrt{m_3}\}.$$

und hieraus:

$$1-kk = \tfrac{1}{4}(4+\mu(\sqrt{m_2}+\sqrt{m_1})^2),$$
$$1-ll = \tfrac{1}{4}(4+\mu(\sqrt{m_2}-\sqrt{m_1})^2),$$
$$k'k' = \frac{\mu}{4}(\sqrt{m_4}+\sqrt{m_3})^2,$$
$$l'l' = \frac{\mu}{4}(\sqrt{m_4}-\sqrt{m_3})^2.$$

Zwischen den vorgegebenen Grössen m_1, m_2, m_3, m_4 müssen solche Bedingungen bestehen, dass:

$$kk+k'k' = 1 \quad \text{und} \quad ll+l'l' = 1$$

ist, d. h. es muss:

$$4+\mu(\sqrt{m_2}+\sqrt{m_1})^2 = \mu(\sqrt{m_4}+\sqrt{m_3})^2,$$
$$4+\mu(\sqrt{m_2}-\sqrt{m_1})^2 = \mu(\sqrt{m_4}-\sqrt{m_3})^2$$

oder:

$$(\sqrt{m_2}+\sqrt{m_1})^2-(\sqrt{m_2}-\sqrt{m_1})^2 = (\sqrt{m_4}+\sqrt{m_3})^2-(\sqrt{m_4}-\sqrt{m_3})^2$$

oder:

$$m_1.m_2-m_3.m_4 = 0$$

sein. Es ergiebt sich also:

Ein immer endlich bleibendes hyperelliptisches Integral, dessen vier im Endlichen liegende Windungspunkte m_1, m_2, m_3, m_4 die Bedingung erfüllen:

$$m_1.m_2-m_3.m_4 = 0,$$

lässt sich immer auf die algebraische Summe zweier elliptischer Integrale erster Gattung reduciren. —

In den Gleichungen (XI.) ist μ ein beliebiger constanter Factor; setzt man

$$\mu = \frac{\alpha\beta(k'+l')^2}{t},$$

wo t eine neue beliebige Constante bedeutet, so erhält $R(z)$ eine einfachere Gestalt:

Es waren α, β durch die Gleichungen

$$\alpha = \frac{\mu}{(k-l)^2}, \quad \beta = \frac{\mu}{(k+l)^2}$$

definirt, mit Hülfe der obigen Gleichung für μ folgt also:

$$\beta = t\left(\frac{k-l}{k'+l'}\right)^2, \quad \alpha = t\left(\frac{k+l}{k'+l'}\right)^2$$

oder, wenn man setzt:

$$\text{(XII.)} \qquad m = \left(\frac{k-l}{k'+l'}\right)^2, \quad n = \left(\frac{k+l}{k'+l'}\right)^2,$$

so wird:

$$\text{(1.)} \qquad \beta = tm, \quad \alpha = tn,$$
$$\mu = mnt.(k'+l')^2.$$

Aus den Gleichungen (XII.) folgt mit Benutzung der Identität:

$$4 \equiv (k'+l')^2 + (k'-l')^2 + 2(kk+ll)$$

die Relation:

$$\text{(2.)} \qquad k'+l' = \frac{2}{\sqrt{1+m}\sqrt{1+n}},$$

demnach wird:

$$\text{(3.)} \qquad \mu = mnt \cdot \frac{4}{(1+m)(1+n)}.$$

Aus den Gleichungen (XII.) folgt ferner:

$$\text{(4.)} \qquad \left(\frac{k'-l'}{k'+l'}\right)^2 = m.n.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen (1.), (2.), (3.), (4.) erhält:

$$R(z) = z(1+\alpha z)(1+\beta z)(\mu z-(k'+l')^2)(\mu z-(k'-l')^2)$$

eine einfachere Form:

Es ist:

$$\mu z-(k'+l')^2 = (k'+l')^2\{mntz-1\}$$
$$= \frac{4}{(1+m)(1+n)}\{mntz-1\},$$
$$\mu z-(k'-l')^2 = \frac{4mn}{(1+m)(1+n)}\{tz-1\},$$

also wird:

$$R(z) = \frac{16(mn)^3.t^4}{(1+m)^2(1+n)^2}.R_1(z),$$

wenn:

$$\text{(XIII.)} \qquad R_1(z) = z\left(z+\frac{1}{nt}\right)\left(z+\frac{1}{mt}\right)\left(z-\frac{1}{nmt}\right)\left(z-\frac{1}{t}\right).$$

Da ferner:

$$4\sqrt{\mu} = 8\,\frac{\sqrt{mnt}}{\sqrt{1+m}\sqrt{1+n}},$$
$$4\sqrt{\mu}\sqrt{\alpha\beta} = 8\,\frac{m.n.t^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+m}\sqrt{1+n}},$$

so erhalten die Gleichungen (XI.) die Form:

$$(\text{XI}^a.)\quad \begin{cases} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\Re(x,k)}} + \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\Re(x,l)}} = P\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{R_1(z)}}, \\ \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\Re(x,k)}} - \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\Re(x,l)}} = Q\int_0^z \frac{z\,dz}{\sqrt{R_1(z)}}, \end{cases}$$

wenn:

$$P = 2\frac{\sqrt{1+m}\sqrt{1+n}}{mn.t^{\frac{1}{2}}},\quad Q = 2\frac{\sqrt{1+m}\sqrt{1+n}}{\sqrt{mn.t}}.$$

§. 10.

Die Werthunterschiede der hyperelliptischen Integrale an den Querschnitten.

Wird die oben abgeleitete Transformationsgleichung (X, pag. 143):

$$x = \frac{4\alpha\beta z}{\mu(1+\alpha z)(1+\beta z)}$$

nach z aufgelöst, so lassen sich die beiden Wurzeln z_1 und z_2, nach Einsetzen der Grössen k und l, auf die Form bringen:

$$\mu z_1 = \frac{1}{x}(\sqrt{1-xkk}+\sqrt{1-xll})^2 = \left(\sqrt{\frac{1}{x}-kk}+\sqrt{\frac{1}{x}-ll}\right)^2 = \frac{x(kk-ll)^2}{(\sqrt{1-xkk}-\sqrt{1-xll})^2},$$

$$\mu z_2 = \frac{1}{x}(\sqrt{1-xkk}-\sqrt{1-xll})^2 = \left(\sqrt{\frac{1}{x}-kk}-\sqrt{\frac{1}{x}-ll}\right)^2 = \frac{x(kk-ll)^2}{(\sqrt{1-xkk}+\sqrt{1-xll})^2}.$$

Hieraus ergeben sich unmittelbar die zu $x = 0,\ 1,\ \infty,\ \frac{1}{kk},\ \frac{1}{ll}$ gehörenden Werthe von z:

$$x = 0,\quad z_1 = \infty,\quad z_2 = 0,$$

$$x = 1,\quad z_1 = \frac{1}{\mu}(k'+l')^2 = \frac{1}{mnt},\quad z_2 = \frac{1}{\mu}(k'-l')^2 = \frac{1}{t},$$

$$x = \infty,\quad z_1 = -\frac{1}{\mu}(k+l)^2 = -\frac{1}{mt},\quad z_2 = -\frac{1}{\mu}(k-l)^2 = -\frac{1}{nt},$$

$$x = \frac{1}{kk},\quad z = +\frac{1}{\mu}(kk-ll) = +\frac{1}{t\sqrt{mn}},$$

$$x = \frac{1}{ll},\quad z = -\frac{1}{\mu}(kk-ll) = -\frac{1}{t\sqrt{mn}}.$$

Diese Werthe von z liegen also in den Windungspunkten der Fläche $T(z)$.

Die beiden Paare von Querschnitten a, b in der Fläche $T(z)$ sind darnach so zu ziehen, dass sie entsprechende Windungspunkte umschliessen, wie die Querschnitte a, b in der Fläche $T(x)$.

Hiernach ergiebt sich:

Das Innere des Querschnittes a_2 in der Fläche $T(z)$ entspricht dem Aeusseren von a_2 in $T(x)$, also dem ganzen Blatte IV. Das Innere von b_2 entspricht in beiden Flächen einander, ebenso das Aeussere von a_1; endlich sind das Aeussere von b_1 in $T(z)$ und das Innere von b_1 in $T(x)$ einander entsprechende Gebiete. Hierdurch sind dann auch die positiven und negativen Seiten der Querschnitte in den beiden Flächen bestimmt, wenn man die auf pag. 139 gegebenen Regeln zu Grunde legt.

Die so entstandene Fläche $T(z)$ ist eine in den kleinsten Theilen ähnliche Abbildung der vierblättrigen Fläche $T(x)$. Den unendlich kleinen Ortsänderungen von z in der ersteren entsprechen proportionale Ortsänderungen von x in der zweiten. Nur in der Nähe der Punkte $x = \frac{1}{kk}$ und $x = \frac{1}{ll}$, für welche die beiden zu einem x gehörenden Werthe von z zusammenfallen, ist die Aenderung von x proportional dem Quadrate der Aenderung von z. Es muss also auch der Querschnitt c, der in die Nähe eines dieser Punkte führt, in der Fläche $T(x)$ einen doppelt so grossen Winkel um diesen Punkt beschreiben $\left(\text{in der Figur um } \frac{1}{kk}\right)$, wie der entsprechende Querschnitt c in $T(z)$ um den entsprechenden Punkt $\frac{1}{i\sqrt{mn}}$; wie es die Figur auch schematisch angiebt.

Bei der wirklichen Berechnung der längs der Durchsetzungslinien erstreckten hyperelliptischen Integrale ist ein durchgehender Unterschied der Integrale:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\Re(x,k)}} \quad \text{und} \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\Re(x,l)}}$$

zu berücksichtigen. Es bezeichne $D(\mu,\nu)$ eine zwischen den Windungspunkten μ, ν sich erstreckende Linie der Durchsetzung, $D_k(\mu,\nu)\mathrm{III}_2$ oder kürzer $D_k\mathrm{III}_2$ den Werth von $\sqrt{\Re(x,k)}$ in einem Punkte des Blattes III an der Seite (2) der betreffenden Durchsetzungslinie. Analog möge die Be-

zeichnung der Werthe von $\sqrt{\mathfrak{R}(x,k)}$ in irgend einem anderen Blatte, und der Werthe von $\sqrt{\mathfrak{R}(x,l)}$ gewählt werden.

Erstreckt man die elliptischen Integrale zunächst von einem Punkte an der Durchsetzungslinie $D\left(1, \frac{1}{kk}\right)$ im Blatte I, z. B. von I_2, um den Punkt $x = \frac{1}{kk}$ herum bis zu einem Punkte derselben Durchsetzungslinie im Blatte III, z. B. bis III_1 so tritt für $\sqrt{\mathfrak{R}(x,k)}$ ein Zeichenwechsel ein, da der Punkt $\frac{1}{kk}$ umschlossen wird. Dagegen ändert $\sqrt{\mathfrak{R}(x,l)}$ nicht sein Zeichen. Daraus folgt also: $D_k\left(1, \frac{1}{kk}\right)I_2 = -D_k III_1$, $D_l\left(1, \frac{1}{kk}\right)I_2 = D_l III_1$. Da weiter bei einer Ortsänderung der Variabeln x von einem Punkte der $D\left(1, \frac{1}{kk}\right)$ bis zu einem Punkte der $D(0,\infty)$ in demselben Blatte und an derselben Seite der Durchsetzungslinie, kein Zeichenwechsel für $\sqrt{\mathfrak{R}(x,k)}$ und $\sqrt{\mathfrak{R}(x,l)}$ eintritt, so folgt, dass die obige Regel für die Vorzeichen der Wurzeln, auch an der Durchsetzungslinie $D(0,\infty)$ gilt. Berücksichtigt man weiter, dass in den übereinanderliegenden Punkten der Blätter I und II, resp. III und IV, welche jede für sich die ursprünglichen Flächen bildeten, die entgegengesetzten Werthe der Wurzeln liegen, so erhält man für diese Werthe an den Durchsetzungslinien:

$$D\left(1, \frac{1}{kk}\right) \quad \text{und} \quad D(0,\infty)$$

die Formeln:

$$\text{(XIV.)} \quad \left\{\begin{array}{l} \quad D_k I_1 = D_k II_2 = D_k III_1 = D_k IV_2 \\ = -D_k I_2 = -D_k II_1 = -D_k III_2 = -D_k IV_1 \end{array}\right.$$

und

$$\text{(XV.)} \quad \left\{\begin{array}{l} \quad D_l I_1 = D_l II_2 = D_l III_2 = D_l IV_1 \\ = -D_l I_2 = -D_l II_1 = -D_l III_1 = -D_l IV_2. \end{array}\right.$$

Anders gestaltet sich der Zeichenwechsel an der Durchsetzungslinie $D\left(\frac{1}{kk}, \frac{1}{ll}\right)$. Hier bedarf es eines Umgangs um den Punkt $\frac{1}{ll}$, um in den Blättern I und III resp. II und IV zu übereinanderliegenden Punkten zu gelangen; und es ändert bei einem solchem Umgange nur $\sqrt{\mathfrak{R}(x,l)}$ sein Zeichen. Hieraus ergeben sich leicht die Formeln:

$$\text{(XVI.)} \quad \left\{\begin{array}{l} \quad D_k\left(\frac{1}{kk}, \frac{1}{ll}\right)I_1 = D_k I_2 = D_k III_1 = D_k III_2 \\ = -D_k\left(\frac{1}{kk}, \frac{1}{ll}\right)II_1 = -D_k II_2 = -D_k IV_1 = -D_k IV_2. \end{array}\right.$$

Für $\sqrt{\mathfrak{R}(x, l)}$ erhält man wieder die Formel (XV.). Aus diesen Formeln, wie auch unmittelbar aus der Fläche ergeben sich die Relationen zwischen den Werthen der Wurzeln, welche zu den vier übereinanderliegenden Punkten auf einer Verbindungslinie solcher Windungspunkte gehören, zwischen denen sich keine Durchsetzungslinien erstrecken, also auf einer Linie zwischen den Punkten $x = 0$ und $x = 1$. Wenn man mit D_k' z. B. einen solchen Werth für die $\sqrt{\mathfrak{R}(x, k)}$ im Blatte I bezeichnet, so folgt:

$$\text{(XVII.)} \quad \begin{cases} D_k' \mathrm{I} = -D_k' \mathrm{II} = \quad D_k' \mathrm{III} = -D_k' \mathrm{IV}, \\ D_l' \mathrm{I} = -D_l' \mathrm{II} = -D_l' \mathrm{III} = \quad D_l' \mathrm{IV}, \end{cases}$$

denn, um zu den betreffenden übereinanderliegenden Punkten z. B. von I nach III zu gelangen, ist ein Umgang um zwei Unstetigkeitspunkte von $\sqrt{\mathfrak{R}(x, k)}$ nöthig, nämlich um $\frac{1}{kk}$ und 1, dagegen nur um einen Unstetigkeitspunkt von $\sqrt{\mathfrak{R}(x, l)}$ nämlich 1.

Es mögen nun mit A_1^1, A_1^2, B_1^1, B_1^2 die Unterschiede der Werthe des Integrals $P\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$ an den Querschnitten resp.: a_1, a_2, b_1, b_2 bezeichnet werden, wenn diese von der negativen zur positiven Seite überschritten werden, analog mit A_2^1, A_2^2, B_2^1, B_2^2 die Unterschiede der Werthe des Integrals $Q\int_0^z \frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}}$ an denselben Querschnitten, in derselben Weise überschritten. Die positiven Werthe der ganzen elliptischen Integrale seien ferner durch folgende Gleichungen definirt:

$$\int_0^1\!{}_{\mathrm{II}} \frac{dx}{\sqrt{R(x, k)}} = +2K, \quad \int_0^{\frac{1}{kk}}\!{}_{\mathrm{II},} \frac{dx}{\sqrt{R(x, k)}} = +2K_1 i,$$

$$\int_0^1\!{}_{\mathrm{II}} \frac{dx}{\sqrt{R(x, l)}} = +2L, \quad \int_0^{\frac{1}{ll}}\!{}_{\mathrm{II},} \frac{dx}{\sqrt{R(x, l)}} = +2L_1 i,$$

wenn mit $\int_m^n\!{}_{\mathrm{II},} \frac{dx}{\sqrt{R(x, k)}}$ oder mit $\int_m^n\!{}_{\mathrm{II},} [k]$ das in dem Blatte II an der Seite 1 der von m bis n gehenden Durchsetzungslinie erstreckte Integral bezeichnet wird und wieder $i = \sqrt{-1}$ ist.

Es folgt dann:

$$A_1^1 = \int_0^1\!{}_{\mathrm{II}} [k] + \int_1^0\!{}_{\mathrm{I}} [k] + \int_0^1\!{}_{\mathrm{II}} [l] + \int_1^0\!{}_{\mathrm{I}} [l],$$

$$A_1^1 = 4K + 4L.$$

Daraus ergiebt sich unmittelbar der Werthunterschied des zweiten Integrals an demselben Querschnitte, nach den Gleichungen (XI^a.):

$$A_2^1 = 4K - 4L.$$

Ferner ist:

$$A_1^2 = \int_1^0 {}_{\mathrm{IV}}[k] + \int_0^1 {}_{\mathrm{III}}[k] + \int_1^0 {}_{\mathrm{IV}}[l] + \int_0^1 {}_{\mathrm{III}}[l]$$

oder mit Hülfe der Formeln (XVII.):

$$A_1^2 = -4K + 4L,$$

also wird:

$$A_2^2 = -4K - 4L.$$

Analog ergiebt sich mit Hülfe der Gleichungen (XIV.) und (XV.):

$$\begin{aligned} B_1^1 &= 4K_1 i + 4L_1 i, \\ B_2^1 &= 4K_1 i - 4L_1 i, \\ B_1^2 &= -4K_1 i + 4L_1 i, \\ B_2^2 &= -4K_1 i - 4L_1 i. \end{aligned}$$

Die von *Riemann* aufgestellten Relationen*) zwischen den constanten Unterschieden *Abel*scher Integrale an den Querschnitten, lauten: Wenn A, B und die Indices derselben die oben angegebene Bedeutung haben, p die charakteristische Zahl bedeutet, welche angiebt, wieviel Paare von Querschnitten zur Herstellung einer für die *Abel*schen Integrale einfach zusammenhängenden Fläche nöthig sind, so ist:

$$(1.) \qquad 0 = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} \{A_\mu^\lambda . B_\nu^\lambda - B_\mu^\lambda . A_\nu^\lambda\}$$

und:

$$(2.) \qquad 0 < \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} \{\alpha^{(\lambda)} . \delta^{(\lambda)} - \beta^{(\lambda)} . \gamma^{(\lambda)}\},$$

worin α, β, γ, δ durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} A^{(\lambda)} &= \alpha^{(\lambda)} + i\gamma^{(\lambda)}, \\ B^{(\lambda)} &= \beta^{(\lambda)} + i\delta^{(\lambda)} \end{aligned}$$

definirt sind.

In unserem Falle, in welchem $p = 2$ ist, muss in (1.) also $\mu = 1$, $\nu = 2$ gesetzt werden. Nach dem Obigen ist dann:

---

*) *Riemann:* Theorie der *Abel*schen Functionen IV, §. 20, 21. In diesem Journal Band 54, 1857. *Riemanns* gesammelte Werke, herausgegeben von *H. Weber;* No. VI.

$$A_1^1 B_2^1 - B_1^1 A_2^1 = \{4K + 4L\}\{4K_1 i - 4L_1 i\} - \{4K_1 i + 4L_1 i\}\{4K - 4L\},$$

$$\begin{aligned} A_1^2 B_2^2 - B_1^2 A_2^2 &= \{-4K + 4L\}\{-4K_1 i - 4L_1 i\} - \{-4K_1 i + 4L_1 i\}\{-4K - 4L\} \\ &= \{4K_1 i + 4L_1 i\}\{4K - 4L\} - \{4K + 4L\}\{4K_1 i - 4L_1 i\}, \end{aligned}$$

also wird

$$(A_1^1 B_2^1 - B_1^1 A_2^1) + (A_1^2 B_2^2 - B_1^2 A_2^2) = 0.$$

Ferner ist, wenn k und l reell und kleiner als 1 vorausgesetzt werden, auch K, L, K_1, L_1 reell, und

$$\gamma^{(\lambda)} = 0, \quad \beta^{(\lambda)} = 0.$$

Also ist für das Integral $P\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} \alpha^{(\lambda)}\delta^{(\lambda)} - \beta^{(\lambda)}\gamma^{(\lambda)} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} \alpha^{(\lambda)}\delta^{(\lambda)} = A_1^1 . B_1^1 . \frac{1}{i} + A_1^2 . B_1^2 . \frac{1}{i}$$

$$= \{4K + 4L\}\{4K_1 + 4L_1\} + \{-4K + 4L\}\{-4K_1 + 4L_1\} = 32\,KK_1 + 32\,LL_1,$$

demnach grösser als Null. Analog ergiebt sich:

$$\begin{aligned} A_2^1 B_2^1 . \frac{1}{i} + A_2^2 B_2^2 . \frac{1}{i} &= \{4K - 4L\}\{4K_1 - 4L_1\} + \{-4K - 4L\}\{-4K_1 - 4L_1\} \\ &= 32\,KK_1 + 32\,LL_1. \end{aligned}$$

Die oben angegebenen Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln, oder den constanten Unterschieden der Integrale an den Querschnitten bestehen also auch für die beiden hier untersuchten hyperelliptischen Integrale erster Gattung; zugleich haben diese die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass die *absoluten* Werthe der Periodicitätsmoduln für beide Integrale und für beide mit gleichem Buchstaben bezeichnete Querschnitte gleich sind.

Die obigen Relationen sind der analytische Ausdruck für die Möglichkeit, aus den p von einander linear unabhängigen *Abel*schen Integralen erster Gattung, mit Hülfe einer linearen Substitution, p andere von einander ebenfalls linear unabhängige Integrale zu bilden, deren inverse Functionen durch die allgemeinen ϑ-Reihen ausdrückbar sind. Nach dem Obigen müssen auch die beiden hier untersuchten hyperelliptischen Integrale diese Eigenschaft besitzen. Es liesse sich also auch von hier aus ein Ausgangspunkt gewinnen für die Untersuchung, welche Herr *Hermite* in der oben citirten Abhandlung begonnen hat, und welche die Fälle behandelt, in denen eine ϑ-Reihe mit zwei Argumenten auf solche mit einem Argument zurückgeführt werden kann. —

Analog, wie die angegebenen Werthunterschiede der hyperelliptischen Integrale an den Querschnitten, sind die Werthe der von einem Windungspunkte zu einem andern erstreckten Integrale abzuleiten. Interesse haben die Werthe derjenigen Integrale, deren obere und untere Grenzen die beiden zu einem und demselben Werthe von x gehörenden Wurzeln z_1 und z_2 sind.

Es ist:

$$P\int_{z=\frac{1}{l}}^{z=\frac{1}{mnl}} \frac{dz}{\sqrt{R_1(z)}} = \int_{1}^{\frac{1}{kk}}{}_{\mathrm{IV}_1}[k] + \int_{\frac{1}{kk}}^{1}{}_{\mathrm{II}_2}[k]$$

plus einem analogen Ausdrucke für $[l]$, also nach den Formeln (XIV.) und (XV.)

$$P\int_{\frac{1}{l}}^{\frac{1}{mnl}} \frac{dz}{\sqrt{R_1(z)}} = +4K_1 i$$

und daher nach den Gleichungen (XI^a.) auch

$$Q\int_{\frac{1}{l}}^{\frac{1}{mnl}} \frac{z\,dz}{\sqrt{R_1(z)}} = +4K_1 i.$$

Diesem entsprechend wird:

$$P\int_{-\frac{1}{nl}}^{-\frac{1}{ml}} \frac{dz}{\sqrt{R_1(z)}} = \int_{\infty}^{0}{}_{\mathrm{III}_2}[k] + \int_{0}^{1}{}_{\mathrm{III}}[k] + \int_{1}^{\frac{1}{kk}}{}_{\mathrm{III}_2}[k]$$

$$+\int_{\frac{1}{kk}}^{1}{}_{\mathrm{I}_1}[k] + \int_{1}^{0}{}_{\mathrm{I}}[k] + \int_{0}^{\infty}{}_{\mathrm{I}_1}[k]$$

+ einem analogen Ausdrucke für $[l]$.

Mit Benutzung der obigen Formeln (XIV.) bis (XVII.) folgt:

$$P\int_{-\frac{1}{nl}}^{-\frac{1}{ml}} \frac{dz}{\sqrt{R_1(z)}} = 2\int_{0}^{\infty}{}_{\mathrm{I}_1}[k] + 2\int_{\frac{1}{kk}}^{1}{}_{\mathrm{I}_1}[k] + 2\int_{1}^{0}{}_{\mathrm{I}}[l].$$

Das in der Fläche, also ohne Ueberschreiten der Querschnitte, erstreckte Integral $\int_{0}^{\infty}{}_{\mathrm{I}_1}[k]$ ist aber gleich dem Integrale $\int_{1}^{\frac{1}{kk}}{}_{\mathrm{I}_1}[k]$, wie sich leicht daraus ergiebt, dass das Integral, um alle vier Windungspunkte, ∞, 0, 1,

$\frac{1}{kk}$ erstreckt, zu Null wird; es folgt also:

$$P\int_{\frac{1}{nt}}^{-\frac{1}{mt}} \frac{dz}{\sqrt{R_1(z)}} = +4L$$

und daher nach Gleichung (XI^a.)

$$Q\int_{\frac{1}{nt}}^{-\frac{1}{mt}} \frac{z\,dz}{\sqrt{R_1(z)}} = -4L.$$

Diese beiden letzteren Integrale liefern uns, zusammen mit den unmittelbar sich ergebenden:

$$P\int_0^{\frac{1}{t}} \frac{dz}{\sqrt{R_1(z)}} = 2K+2L,$$

$$Q\int_0^{\frac{1}{t}} \frac{z\,dz}{\sqrt{R_1(z)}} = 2K-2L,$$

vier reelle ganze Integrale.

Die Determinante derselben ist:

$$PQ\int_0^{\frac{1}{t}} \frac{z\,dz}{\sqrt{R_1(z)}} \cdot \int_{-\frac{1}{nt}}^{-\frac{1}{mt}} \frac{dz}{\sqrt{R_1(z)}} - PQ\int_0^{\frac{1}{t}} \frac{dz}{\sqrt{R_1(z)}} \cdot \int_{\frac{1}{nt}}^{-\frac{1}{mt}} \frac{z\,dz}{\sqrt{R_1(z)}} =$$

$$= (2K-2L)4L - (2K+2L)(-4L) = 16KL,$$

oder, wenn man zur Unterscheidung die Variabele des Integrals, dessen Grenzen $-\frac{1}{nt}$ und $-\frac{1}{mt}$ sind, mit z_1 bezeichnet:

$$PQ\int_{z=0}^{z=\frac{1}{t}}\int_{z_1=\frac{1}{nt}}^{z_1=-\frac{1}{mt}} \frac{(z-z_1)\,dz\,dz_1}{\sqrt{R_1(z)}\sqrt{R_1(z_1)}} = 16KL.$$

Hiernach wird die gesuchte Darstellung des oben definirten Mittels $\mathfrak{m}(a, b, c)$ durch reelle ganze hyperelliptische Integrale leicht erhalten. Es lautete Gleichung (VII.) pag. 130:

$$\frac{1}{\mathfrak{m}(a,b,c)} = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{f}{\varphi.\psi} .KL,$$

ferner war (s. Gleichungen (XI^a.), pag. 147):

$$P = 2\frac{\sqrt{1+m}\sqrt{1+n}}{m.nt^2}, \quad Q = 2\frac{\sqrt{1+m}\sqrt{1+n}}{\sqrt{mn}.t^3}.$$

Darnach ergiebt sich also:

$$\frac{\pi^2}{\mathfrak{m}(a,b,c)} = \frac{(1+m)(1+n)}{(mn)^{\frac{3}{4}}.t^2}\cdot\frac{f}{\varphi\psi}\cdot\int_{z=0}^{z=\frac{1}{t}}\int_{z_1=-\frac{1}{nt}}^{z_1=-\frac{1}{mt}}\frac{(z-z_1)\,dz\,dz_1}{\sqrt{R_1(z)}\sqrt{R_1(z_1)}}.$$

Man *bestimme* nun die bis jetzt *beliebig gelassene* Constante t so, dass der Factor des Doppelintegrals gleich Eins wird. Dann lässt sich der erhaltene Satz so aussprechen:

Bildet man aus den drei positiven reellen Grössen a_ν, b_ν, c_ν, die der Ungleichheit $a_\nu > b_\nu > c_\nu$ genügen, nach dem Algorithmus:

$$2a_{\nu+1} = \frac{a_\nu+b_\nu}{2}+c_\nu,$$

$$2b_{\nu+1} = \sqrt{a_\nu b_\nu}+c_\nu,$$

$$2c_{\nu+1} = (\sqrt{a_\nu}+\sqrt{b_\nu})\sqrt{c_\nu},$$

drei neue Grössen $a_{\nu+1}$, $b_{\nu+1}$, $c_{\nu+1}$ u. s. w.; bezeichnet den Grenzwerth, dem sich die Grössen a_ν, b_ν, c_ν bei wachsendem ν nähern, mit $\mathfrak{m}(a_\nu, b_\nu, c_\nu)$ und setzt ferner für irgend einen Werth des Index ν:

$$f_\nu = \frac{a_\nu+b_\nu}{2}-\sqrt{\left(\frac{a_\nu+b_\nu}{2}\right)^2-c_\nu^2},$$

$$\varphi_\nu = \sqrt{a_\nu b_\nu}-\sqrt{a_\nu b_\nu-c_\nu^2},$$

$$\psi_\nu = \sqrt{a_\nu b_\nu}+\sqrt{a_\nu b_\nu-c_\nu^2},$$

$$k' = \frac{f_\nu}{\varphi_\nu},\quad l' = \frac{f_\nu}{\psi_\nu},$$

(also $k'<1$, $l'<1$), definirt weiter k und l durch die Gleichungen:

$$kk+k'k' = 1,\quad ll+l'l' = 1$$

und setzt:

$$m = \left(\frac{k-l}{k'+l'}\right)^2,\quad n = \left(\frac{k+l}{k'+l'}\right)^2,$$

$$t^2 = \frac{(1+m)(1+n)}{(mn)^{\frac{3}{4}}}\cdot\frac{f_\nu}{\varphi_\nu\psi_\nu},$$

$$R_1(z) = z\left(z-\frac{1}{t}\right)\left(z-\frac{1}{mnt}\right)\left(z+\frac{1}{nt}\right)\left(z+\frac{1}{mt}\right),$$

so ist:

$$\frac{\pi^2}{\mathfrak{m}(a_\nu,b_\nu,c_\nu)} = \int_{z=0}^{z=\frac{1}{t}}\int_{z_1=-\frac{1}{nt}}^{z_1=-\frac{1}{mt}}\frac{(z-z_1)\,dz\,dz_1}{\sqrt{R_1(z)}\sqrt{R_1(z_1)}}.$$

§. 11.

Die eben abgeleitete Darstellung des Mittels $\mathfrak{m}(a, b, c)$ durch hyperelliptische Integrale und durch ein Product der *Gauss*ischen arithmetisch-geometrischen Mittel, lässt sich umgekehrt aus dem allgemeinen *Borchardt*schen Theoreme ableiten, wenn man die Bedingungen aufsucht, welchen die vier Elemente des Mittels genügen müssen, damit die Nullwerthe m_1, m_2, m_3, m_4 der ganzen rationalen Function, deren Quadratwurzel im Nenner unter den hyperelliptischen Integralen steht, die oben angegebene Bedingung erfüllen:

$$m_1 . m_2 - m_3 . m_4 = 0,$$

also die Integrale auf elliptische Integrale reducirbar sind. Da man bei der Durchführung dieser Rechnung auf einen *speciellen* Fall geleitet wird, in welchem *auch ein Mittel aus vier Elementen* durch *solche von zwei* dargestellt werden kann, so möge sie im Folgenden kurz ausgeführt werden.

Der *Borchardt*sche Satz lautet *):

„*Man bilde aus den vier Elementen a, b, c, e durch den Algorithmus:*

$$4a_1 = a + b + c + e,$$
$$2b_1 = \sqrt{ab} + \sqrt{ce},$$
$$2c_1 = \sqrt{ac} + \sqrt{be},$$
$$2e_1 = \sqrt{ae} + \sqrt{bc},$$

vier Grössen a_1, b_1, c_1, e_1, aus diesen durch den nämlichen Algorithmus wiederum vier Grössen a_2, b_2, c_2, e_2 etc. in infinitum, dann nähern sich mit wachsendem n die vier Grössen a_n, b_n, c_n, e_n der nämlichen Grenze g, deren Werth man folgendermassen bestimmt: man setze

$$\mathfrak{a} = a + b + c + e,$$
$$\mathfrak{b} = a + b - c - e,$$
$$\mathfrak{c} = a - b + c - e,$$
$$\mathfrak{e} = a - b - c + e,$$

$$2b' = \sqrt{\mathfrak{ab}} + \sqrt{\mathfrak{ce}}, \qquad 2b'' = \sqrt{\mathfrak{ab}} - \sqrt{\mathfrak{ce}},$$
$$2c' = \sqrt{\mathfrak{ac}} + \sqrt{\mathfrak{be}}, \qquad 2c'' = \sqrt{\mathfrak{ac}} - \sqrt{\mathfrak{be}},$$
$$2e' = \sqrt{\mathfrak{ae}} + \sqrt{\mathfrak{bc}}, \qquad 2e'' = \sqrt{\mathfrak{ae}} - \sqrt{\mathfrak{bc}},$$

*) Monatsberichte der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom 2. November 1876 pag. 617, und vom Februar 1877.

$$\Delta = (abceb'c'e'b''c''e'')^{\frac{1}{3}},$$

$$\alpha_0 = \frac{acb'}{\Delta}, \quad \alpha_1 = \frac{cc'e'}{\Delta}, \quad \alpha_2 = \frac{ac''e'}{\Delta}, \quad \alpha_3 = \frac{b'c'c''}{\Delta},$$

$$R(z) = z(z-\alpha_0)(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3),$$

dann ist:

$$\text{(XVIII.)} \quad \frac{\pi^2}{g} = \int_0^{\alpha_3} dz' \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} dz \frac{z-z'}{\sqrt{R(z)R(z')}}.“$$

Die drei möglichen Formen, unter denen das Product zweier der Grössen α_0, α_1, α_2, α_3 gleich sein kann dem Producte der anderen beiden, sind:

$$\alpha_0\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2 = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha_0\alpha_1 - \alpha_2\alpha_3 = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha_0\alpha_2 - \alpha_3\alpha_1 = 0.$$

Besteht die erste Gleichung, so ist:

$$acb'.b'c'c'' = cc'e'.ac''e'$$

oder:

$$b'b' = e'e',$$

daraus folgt leicht:

$$b = e,$$

dann erhält also der obige Algorithmus die Gestalt:

$$2a_1 = \frac{a+c}{2} + b,$$

$$2b_1 = (\sqrt{a}+\sqrt{c})\sqrt{b},$$

$$2c_1 = \sqrt{ac} + b.$$

Dieser stimmt überein mit dem pag. 128 für das Mittel $\mathrm{m}(a, b, c)$ erhaltenen, wenn man b mit c, b_1 mit c_1, allgemein b_ν mit c_ν vertauscht.

Setzt man nun:

$$\alpha_0 = \frac{1}{mnt}, \quad \alpha_1 = -\frac{1}{mt}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{nt}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{t},$$

so ergiebt sich:

$$m = -\frac{c''}{c}, \quad n = -\frac{c'}{a}.$$

Um hieraus k und l zu berechnen, sind die Gleichungen (XII.) pag. 146:

$$m = \left(\frac{k-l}{k'+l'}\right)^2, \quad n = \left(\frac{k+l}{k'+l'}\right)^2$$

nach k und l aufzulösen. Dies ergiebt:

$$k = \frac{\sqrt{n}+\sqrt{m}}{\sqrt{1+n}\sqrt{1+m}}, \quad l = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{m}}{\sqrt{1+n}\sqrt{1+m}},$$

$$k' = \frac{1-\sqrt{nm}}{\sqrt{1+n}\sqrt{1+m}}, \quad l' = \frac{1+\sqrt{nm}}{\sqrt{1+n}\sqrt{1+m}}.$$

Man findet dann:

$$k' = \frac{\sqrt{ac} - \sqrt{ac - b^2}}{\frac{a+c}{2} - \sqrt{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - b^2}}, \quad l' = \frac{\sqrt{ac} + \sqrt{ac - b^2}}{\frac{a+c}{2} - \sqrt{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - b^2}}.$$

Mit Hülfe der oben abgeleiteten Gleichung (pag. 154):

$$\frac{4(1+m)(1+n)}{(mn)^{\frac{3}{2}} . t^2} \int_{z=0}^{z=\frac{1}{l}} \int_{z_1=-\frac{1}{n'}}^{z_1=\frac{1}{m'}} \frac{(z-z_1)\,dz\,dz_1}{\sqrt{R_1(z)}\sqrt{R_1(z_1)}} = 16KL$$

erhält dann die *Borchardt*sche Gleichung die Form:

$$\frac{\pi^2}{g} = \frac{(mn)^{\frac{3}{2}} . t^2}{4(1+m)(1+n)} \cdot 16KL = \frac{(mn)^{\frac{3}{2}} . t^2}{4(1+m)(1+n)} \cdot 16 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\mathrm{M}(1, k')} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\mathrm{M}(1, l')}$$

$$\frac{1}{g} = \frac{(mn)^{\frac{3}{2}} . t^2}{(1+m)(1+n)} \cdot \frac{1}{\mathrm{M}(1, k')\mathrm{M}(1, l')}.$$

Nun ist:

$$t^2 = \frac{bb''}{b'} \cdot \frac{(ac)^{\frac{1}{2}}}{(c'c'')^{\frac{1}{2}}}, \quad (mn)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{c'c''}{ac}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$(1+m)(1+n) = \frac{(c-c'')(a-c')}{ac}.$$

also wird:

$$\frac{1}{g} = \frac{bb''}{b'} \cdot \frac{1}{(c-c'')(a-c')} \cdot \frac{1}{\mathrm{M}(1, k')\mathrm{M}(1, l')}.$$

Ferner ergiebt sich:

$$\frac{b''}{b'} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} = \frac{b}{\frac{a+c}{2} + \sqrt{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - b^2}},$$

$$\frac{bb''}{b'} = \frac{a+c}{2} - \sqrt{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - b^2}$$

und:

$$(a-c')(c-c'') = \left\{\frac{a+c}{2} - \sqrt{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - b^2}\right\}^2.$$

Werden in der früheren Definition der Grössen f, φ, ψ (s. pag. 128) die Buchstaben b und c vertauscht, und die Bezeichnungen f, φ, ψ ungeändert gelassen, so entsteht:

$$f = \frac{a+c}{2} - \sqrt{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - b^2},$$

$$\varphi = \sqrt{ac} - \sqrt{ac - b^2},$$

$$\psi = \sqrt{ac} + \sqrt{ac - b^2},$$

und man erhält dann:

$$k' = \frac{\varphi}{f}, \quad l' = \frac{\psi}{f}$$

und also nach Einsetzung in die obige Gleichung für $\frac{1}{g}$:

$$\frac{1}{g} = \frac{f}{ff} \cdot \frac{1}{\mathrm{M}\left(1, \frac{\varphi}{f}\right)} \cdot \frac{1}{\mathrm{M}\left(1, \frac{\psi}{f}\right)}$$

oder:

$$g = \frac{\mathrm{M}(f, \varphi)\,\mathrm{M}(f, \psi)}{f}.$$

d. i. die oben auf rein algebraischem Wege abgeleitete Gleichung (pag. 128). Die unsymmetrisch in dem Algorithmus für g, wie in f, φ, ψ auftretende Grösse ist hier mit b, oben mit c bezeichnet. —

Besteht zweitens zwischen den Grössen α_0, α_1, α_2, α_3 die Gleichung:

$$\alpha_0 . \alpha_2 - \alpha_3 . \alpha_1 = 0,$$

so folgt daraus:

$$aa = c'c'$$

und nach vollständiger Durchführung der Rechnung:

$$(1.) \qquad 2c = \frac{ab}{e} + \frac{ae}{b} + \frac{eb}{a}.$$

Aus der dritten Gleichung:

$$\alpha_0 \alpha_1 - \alpha_2 \alpha_3 = 0$$

ergiebt sich analog:

$$cc = c''c''$$

und hieraus:

$$(2.) \qquad 2a = \frac{bc}{e} + \frac{ce}{b} + \frac{eb}{c}.$$

Diese beiden letzteren Fälle bedeuten also nicht wesentlich verschiedene Bedingungsgleichungen für die Grössen a, b, c, e. Gleichung (1.) geht durch Vertauschung von c und a mit einander in (2.) über.

Es bestehe die Gleichung (2.), so dass, wenn man:

$$\frac{bc}{2e} = \beta, \quad \frac{eb}{2c} = \gamma, \quad \frac{ce}{2b} = \varepsilon$$

setzt,

$$a = \beta + \gamma + \varepsilon$$

wird, also die vier Elemente des Mittels sind:

$$\beta + \gamma + \varepsilon, \quad b, \quad c, \quad e.$$

Die in dem *Borchardt*schen Satze vorkommenden Grössen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{e}$, b', c', e' etc. erhalten dann die einfache Darstellung:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a} &= \{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}+\sqrt{\varepsilon}\}^2,\\
\mathfrak{b} &= \{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}-\sqrt{\varepsilon}\}^2,\\
\mathfrak{c} &= \{\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}+\sqrt{\varepsilon}\}^2,\\
\mathfrak{e} &= \{\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}-\sqrt{\varepsilon}\}^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a &= \beta+\gamma+\varepsilon, & & \\
b' &= \beta+\gamma-\varepsilon, & b'' &= b,\\
c' &= \beta-\gamma+\varepsilon, & c'' &= c,\\
e' &= \beta-\gamma-\varepsilon, & e'' &= -e.
\end{aligned}$$

Wie aus den Formeln des *Borchardt*schen Satzes ersichtlich ist, sind für b', c', e' die positiven Werthe zu nehmen. Die obigen Grössen sind positiv, wenn $\beta > \gamma > \varepsilon$ und $\beta > \gamma+\varepsilon$, oder wenn man für b, c, e die Ungleichheiten voraussetzt:

$$e < c < b \quad \text{und} \quad e < \frac{b.c}{b+c}.$$

Setzt man:

$$\Delta' = \{b^2 c^2 e^2 . a b' c' e'\}^{\frac{1}{4}}$$

$$\alpha'_0 = \frac{acb'}{\Delta'}, \quad \alpha'_1 = \frac{cc'e'}{\Delta'}, \quad \alpha_2 = \frac{ace'}{\Delta}, \quad \alpha_3 = \frac{b'c'c}{\Delta'},$$

so ist, in Folge des negativen Werthes von e'':

$$\Delta = (-1)^{\frac{1}{4}}\Delta',$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{(-1)^{\frac{1}{4}}}\alpha_0, \quad \alpha_1 = \frac{1}{(-1)^{\frac{1}{4}}}\alpha_1, \quad \alpha_2 = \frac{1}{(-1)^{\frac{1}{4}}}\alpha_2, \quad \alpha_3 = \frac{1}{(-1)^{\frac{1}{4}}}\alpha_3.$$

Befreit man die Grenzen der Integrale von der als Factor auftretenden vierten Wurzel der negativen Einheit, so ergiebt sich:

$$\frac{\pi^2}{g} = i\int_{\alpha'_0}^{\alpha'_3} dz' \int_{\alpha_2}^{\alpha'_1} dz \frac{z-z'}{\sqrt{R(z)R(z')}}.$$

Dass das Doppelintegral, wie die Gleichung es fordert, einen reellen Werth hat, lässt sich so zeigen:

Nach dem obigen ist:

$$\begin{aligned}
\Delta'(\alpha_1-\alpha'_2) &= ce'(c'-a) &&= -ce'.2\gamma,\\
\Delta'(\alpha'_2-\alpha_3) &= c(ae'-b'c') &&= -c.4\gamma\varepsilon,\\
\Delta'(\alpha'_3-\alpha'_0) &= cb'(c'-a) &&= -cb'.2\gamma,
\end{aligned}$$

daraus folgt:

$$0 < \dot{\alpha}_1 < \dot{\alpha}_2 < \dot{\alpha}_3 < \dot{\alpha}_0.$$

Es ist also das Integral zwischen den Grenzen 0 und $\dot{\alpha}_3$ complex, das Integral zwischen den Grenzen $\dot{\alpha}_2$ und $\dot{\alpha}_1$ rein imaginär. Wird das erstere in die Theile von 0 bis $\dot{\alpha}_1$, von $\dot{\alpha}_1$ bis $\dot{\alpha}_2$, von $\dot{\alpha}_2$ bis $\dot{\alpha}_3$ zerlegt, so hebt es sich in dem Doppelproducte, wie ersichtlich, zum Theil mit dem von $\dot{\alpha}_2$ bis $\dot{\alpha}_1$ erstreckten Integrale auf, und man erhält dann:

$$\text{(XIX.)} \quad \begin{cases} \dfrac{\pi^2}{g} = i\displaystyle\int_{\dot{\alpha}_2}^{\dot{\alpha}_1} \frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}} \left\{ \int_0^{\dot{\alpha}_1} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} + \int_{\dot{\alpha}_2}^{\dot{\alpha}_3} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} \right\} \\ \qquad - i\displaystyle\int_{\dot{\alpha}_2}^{\dot{\alpha}_1} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} \left\{ \int_0^{\dot{\alpha}_1} \frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}} + \int_{\dot{\alpha}_2}^{\dot{\alpha}_3} \frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}} \right\}. \end{cases}$$

Die als Summanden auftretenden Integrale sind nach dem obigen reell; die Integrale, deren Factor i ist, sind rein imaginär, also ist der Werth der rechten Seite der Gleichung ein rein reeller.

Um den Werth der von $z = 0$ bis $z = \alpha_3$ stetig erstreckten hyperelliptischen Integrale zu erhalten, bestimmen wir zunächst die absoluten Werthe der Integrale zwischen je zwei benachbarten Windungspunkten. Das Integral, das stetig von $z = 0$ an den Windungspunkten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_0, +\infty$ vorbei und von $-\infty$ bis $z = 0$ zurück erstreckt wird, muss den Werth Null haben, und daraus ergeben sich dann die Vorzeichen der Werthe der einzelnen Integrale.

Setzt man:

$$\alpha_0 = \frac{1}{mnt}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{t}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{nt}, \quad \alpha_3 = -\frac{1}{mt},$$

so ist, in Folge der oben (pag. 147) angegebenen, zu einander gehörenden Werthsysteme von z und x und der als positiv angenommenen Werthe der elliptischen Integrale:

$$P\int_0^{\alpha_1} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = -2K+2L; \quad P\int_{\alpha_1}^{\alpha_3} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = -\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\mathfrak{R}(x,k)}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\mathfrak{R}(x,l)}}.$$

Ferner ergab sich mit Hülfe der construirten Fläche (pag. 154) (wie übrigens auch algebraisch abgeleitet werden kann):

$$P\int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = \varepsilon_1 . 4L; \quad P\int_{\alpha_1}^{\alpha_0} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = \varepsilon_2 \Big\{ + \int_{\infty}^{1} \frac{dx}{\sqrt{\Re(x,k)}} + \int_{\infty}^{1} \frac{dx}{\sqrt{\Re(x,l)}} \Big\};$$

$$P\int_{\alpha_0}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = \varepsilon_3 . \{2K + 2L\}; \quad P\int_{-\infty}^{0} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = \varepsilon_4 . 2\int_{0}^{\frac{1}{kk}} \frac{dx}{\sqrt{\Re(x,k)}};$$

worin die ε_ν den Werth ± 1 haben.

Die Integrale von α_1 bis α_2, von α_3 bis α_0, von $z = -\infty$ bis $z = 0$, sind rein imaginär, unter der Voraussetzung, dass α_1, α_2, α_3, α_0 positiv reelle Werthe haben; denn man erhält mit Hülfe der Substitution:

$$x = \frac{y - k'k'}{kky},$$

wenn:

$$kk + k'k' = 1,$$

die Gleichung:

$$\int_{+1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{\Re(x,k)}} = \frac{i}{k'} \int_0^{+1} \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)\left(1-\frac{y}{k'k'}\right)}} = \frac{2i}{k'} K\left(\frac{1}{k'}\right),$$

und analog:

$$\int_{+1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{\Re(x,l)}} = \frac{i}{l'} \int_0^{+1} \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)\left(1-\frac{y}{l'l'}\right)}} = \frac{2i}{l'} L\left(\frac{1}{l'}\right),$$

wenn wir $\frac{1}{k'}$ resp. $\frac{1}{l'}$, wie oben k resp. l, als Argumente von K resp. L auffassen. Ferner ergiebt die Substitution:

$$x = \frac{1 - y}{kk},$$

die Gleichung:

$$\int_0^{\frac{1}{kk}} \frac{dx}{\sqrt{\Re(x,k)}} = \frac{2i}{k'} K\left(\frac{1}{k'}\right).$$

Die Integrale $K\left(\frac{1}{k'}\right)$ und $L\left(\frac{1}{l'}\right)$ sind reell, denn da:

$$\alpha_2 = -\frac{1}{nl}, \quad \alpha_3 = -\frac{1}{ml},$$

und α_2, α_3 der Voraussetzung nach positiv reell sind, so haben n, m negative reelle Werthe, also werden nach den Gleichungen (s. pag. 157):

$$kk = \frac{(\sqrt{n} + \sqrt{m})^2}{(1+n)(1+m)}, \quad ll = \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{m})^2}{(1+n)(1+m)}$$

kk und ll negativ reell, also $k'k'$ und $l'l'$ positiv und grösser als Eins.

Die Summe sämmtlicher Integrale muss, wenn sie stetig erstreckt sind, d. i. so, dass kein Windungspunkt umschlossen wird, Null sein; daraus folgt:

$$-2K+2L+\varepsilon_1.4L+\varepsilon_3(2K+2L) = 0,$$

$$-\frac{2i}{k'}K\left(\frac{1}{k'}\right)+\frac{2i}{l'}L\left(\frac{1}{l'}\right)+\varepsilon_2\left(\frac{2i}{k'}K\left(\frac{1}{k'}\right)+\frac{2i}{l'}L\left(\frac{1}{l'}\right)\right)+\varepsilon_4.\frac{4i}{k'}K\left(\frac{1}{k'}\right) = 0,$$

also wird:

$$\varepsilon_3 = +1, \quad \varepsilon_1 = -1 \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 = -1, \quad \varepsilon_4 = +1.$$

Es entspricht daher unter der Voraussetzung reeller positiver Werthe der α_1, α_2, α_3, α_0, der einen Halbebene der Variablen z, in der Ebene des Integralwerthes:

$$u = P\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$$

das Innere einer sechsseitigen geschlossenen Figur, deren Seiten, unter rechtem Winkel sich schneidend, der reellen oder imaginären Axe parallel sind, und dargestellt werden durch:

$$-2K+2L; \quad -\frac{2i}{k'}K\left(\frac{1}{k'}\right)+\frac{2i}{l'}L\left(\frac{1}{l'}\right); \quad -4L;$$

$$-\frac{2i}{k'}K\left(\frac{1}{k'}\right)-\frac{2i}{l'}L\left(\frac{1}{l'}\right); \quad +2K+2L; \quad +\frac{4i}{k'}K\left(\frac{1}{k'}\right).$$

Das zweite immer endlich bleibende hyperelliptische Integral:

$$v = Q\int_0^z \frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

unterscheidet sich von dem ersten nur durch das Vorzeichen des vom Modul l abhängigen elliptischen Integrals. Die sechsseitige Figur in der Ebene v, welche der Halbebene in z entspricht, ist also an Inhalt der Figur in der Ebene u gleich gross, und man erhält sie aus dieser durch Drehung um 180° um die reelle Axe.

In Folge der Bestimmung von $\varepsilon_1 = -1$ ergiebt sich als Werth des von $z = 0$ bis $z = \alpha_3$ stetig erstreckten Integrals:

$$P\int_0^{\alpha_3} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = -2K-2L-\frac{2i}{k'}K\left(\frac{1}{k'}\right)+\frac{2i}{l'}L\left(\frac{1}{l'}\right),$$

und es verwandelt sich demnach die Gleichung (s. p. 160):

$$\frac{\pi^2}{g} = i\int_0^{\alpha_3} dz'\int_{\alpha_2}^{\alpha_1} dz \frac{z-z'}{\sqrt{R(z)}\sqrt{R(z')}}$$

in die folgende:

$$\frac{\pi^2}{g} = \frac{i}{PQ}\cdot\left\{-2K-2L-\frac{2i}{k'}K\left(\frac{1}{k'}\right)+\frac{2i}{l'}L\left(\frac{1}{l'}\right)\right\}\left\{+\frac{2i}{k'}K\left(\frac{1}{k'}\right)+\frac{2i}{l'}L\left(\frac{1}{l'}\right)\right\}$$
$$-\frac{i}{PQ}\cdot\left\{-2K+2L-\frac{2i}{k'}K\left(\frac{1}{k'}\right)-\frac{2i}{l'}L\left(\frac{1}{l'}\right)\right\}\left\{+\frac{2i}{k'}K\left(\frac{1}{k'}\right)-\frac{2i}{l'}L\left(\frac{1}{l'}\right)\right\},$$

$$\frac{\pi^2}{g} = \frac{i}{PQ}\cdot\left\{-8iL\cdot\frac{1}{k'}K\left(\frac{1}{k'}\right)-8\cdot\frac{1}{k'}K\left(\frac{1}{k'}\right)\cdot\frac{1}{l'}L\left(\frac{1}{l'}\right)\right.$$
$$\left.-8iK\cdot\frac{1}{l'}L\left(\frac{1}{l'}\right)+8\cdot\frac{1}{k'}K\left(\frac{1}{k'}\right)\cdot\frac{1}{l'}L\left(\frac{1}{l'}\right)\right\},$$

oder:

$$\frac{\pi^2}{g} = \frac{8}{PQ}\left\{L\cdot\frac{1}{k'}K\left(\frac{1}{k'}\right)+K\cdot\frac{1}{l'}L\left(\frac{1}{l'}\right)\right\}.$$

Die Grössen k' und l' sind als Functionen der Elemente, b, c, e des Mittels zu berechnen: Mit Hülfe der Gleichungen (pag. 161):

$$\alpha_0 = \frac{1}{mnt} = \frac{acb'}{\Delta}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{t} = \frac{cc'e'}{\Delta},$$
$$\alpha_2 = -\frac{1}{nt} = \frac{ace'}{\Delta}, \quad \alpha_3 = -\frac{1}{mt} = \frac{cb'c'}{\Delta},$$

erhält man:

$$n = -\frac{c'}{a}, \quad m = -\frac{e'}{b'}.$$

Die Relationen:

$$k'k' = \frac{(1-\sqrt{nm})^2}{(1+n)(1+m)}, \quad l'l' = \frac{(1+\sqrt{nm})^2}{(1+n)(1+m)}, \quad \text{(s. pag. 157)},$$

ergeben dann, wenn wir setzen:

$$k'k' = \frac{uu}{pp}, \quad l'l' = \frac{ss}{pp},$$

und die Gleichungen:

$$a = \beta+\gamma+\varepsilon, \quad b' = \beta+\gamma-\varepsilon, \quad c' = \beta-\gamma+\varepsilon, \quad e' = \beta-\gamma-\varepsilon, \quad \text{(s. pag. 160)}$$

benutzen:

$$p = 2\gamma; \quad u = \sqrt{(\beta+\gamma)^2-\varepsilon^2}-\sqrt{(\beta-\gamma)^2-\varepsilon^2};$$
$$s = \sqrt{(\beta+\gamma)^2-\varepsilon^2}+\sqrt{(\beta-\gamma)^2-\varepsilon^2}.$$

Andererseits ist:

$$L = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\mathrm{M}(1, l')} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\mathrm{M}\left(1, \frac{s}{p}\right)} = \frac{\pi}{2}\cdot p\cdot\frac{1}{\mathrm{M}(p, s)},$$

$$K = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\mathrm{M}(1, k')} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\mathrm{M}\left(1, \frac{u}{p}\right)} = \frac{\pi}{2}\cdot p\cdot\frac{1}{\mathrm{M}(p, u)},$$

$$\frac{1}{k'}K\left(\frac{1}{k'}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{k'}\cdot\frac{1}{\mathrm{M}\left(1,\sqrt{1-\frac{1}{k'k'}}\right)}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{p}{u}\cdot\frac{1}{\mathrm{M}\left(1,\sqrt{1-\frac{pp}{uu}}\right)}$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot p\cdot\frac{1}{\mathrm{M}(u,\sqrt{uu-pp})},$$

$$\frac{1}{l'}L\left(\frac{1}{l'}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{l'}\cdot\frac{1}{\mathrm{M}\left(1,\sqrt{1-\frac{1}{l'l'}}\right)}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{p}{s}\cdot\frac{1}{\mathrm{M}\left(1,\sqrt{1-\frac{pp}{ss}}\right)}$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot p\cdot\frac{1}{\mathrm{M}(s,\sqrt{ss-pp})},$$

worin M, wie oben, ein arithmetisch-geometrisches Mittel bedeutet.

Darnach erhält die obige Gleichung für $\frac{\pi^2}{g}$ die Gestalt:

$$\frac{\pi^2}{g}=\frac{8}{PQ}\cdot\frac{pp}{4}\cdot\pi^2\left\{\frac{1}{\mathrm{M}(p,s)}\cdot\frac{1}{\mathrm{M}(u,u')}+\frac{1}{\mathrm{M}(p,u)}\cdot\frac{1}{\mathrm{M}(s,s')}\right\},$$

wenn:

$$u'u'=uu-pp,\quad s's'=ss-pp.$$

Die Grössen P, Q waren durch die Gleichungen bestimmt:

$$P=2\frac{\sqrt{1+n}\sqrt{1+m}}{n.m.t^{\frac{1}{2}}},\quad Q=2\cdot\frac{\sqrt{1+n}\sqrt{1+m}}{\sqrt{nm}.t^{\frac{1}{2}}}\quad \text{(pag. 154)}.$$

Mit Hülfe von:

$$n=-\frac{c'}{a},\quad m=-\frac{e'}{b'},\quad \frac{cc'e'}{\varDelta}=\frac{1}{t},\quad \varDelta=\{ab^2c^2e^2.b'c'e'\}^{\frac{1}{4}}$$

erhält man nach möglichster Reduction:

$$\frac{1}{PQ}=\frac{1}{4}\cdot\frac{be}{c}\cdot\frac{1}{(a-c')(b'-e')}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\gamma}=\frac{1}{4p}.$$

Darnach wird also:

$$\frac{1}{g}=\frac{p}{2}\left\{\frac{1}{\mathrm{M}(p,s)}\cdot\frac{1}{\mathrm{M}(u,u')}+\frac{1}{\mathrm{M}(p,u)}\cdot\frac{1}{\mathrm{M}(s,s')}\right\}.$$

Durch die obigen Gleichungen für p, s, u, aus denen sich mit Hülfe der Identitäten:

$$\{(\beta+\gamma)^2-\varepsilon^2\}\{(\beta-\gamma)^2-\varepsilon^2\}=\{(\gamma+\varepsilon)^2-\beta^2\}\{(\gamma-\varepsilon)^2-\beta^2\}=\{(\varepsilon+\beta)^2-\gamma^2\}\{(\varepsilon-\beta)^2-\gamma^2\}$$

die folgenden ergeben:

$$u'=\sqrt{\beta^2-(\gamma-\varepsilon)^2}-\sqrt{\beta^2-(\gamma+\varepsilon)^2},\quad s'=\sqrt{\beta^2-(\gamma-\varepsilon)^2}+\sqrt{\beta^2-(\gamma+\varepsilon)^2},$$

ist die Abhängigkeit der Elemente der *Gauss*ischen Mittel von denen des

Mittels aus vier Elementen bestimmt. Diese Gleichungen sind umgekehrt nach b, c, e aufzulösen:

$$\left(\frac{s+u}{2}\right)^2 = (\beta+\gamma)^2 - \varepsilon^2, \quad \left(\frac{s-u}{2}\right)^2 = (\beta-\gamma)^2 - \varepsilon^2,$$

$$ss + uu = 4(\beta^2+\gamma^2-\varepsilon^2), \quad su = 4\beta\gamma = 4\beta\cdot\frac{p}{2},$$

also wird:

$$\beta = \frac{su}{2p}, \quad \gamma = \frac{p}{2}, \quad \varepsilon = \frac{s'u'}{2p},$$

aus denen in Folge von:

$$\beta = \frac{bc}{2e}, \quad \gamma = \frac{be}{2c}, \quad \varepsilon = \frac{ce}{2b}$$

sich ergiebt:

$$b = \sqrt{su}, \quad c = \frac{\sqrt{su}\sqrt{s'u'}}{p}, \quad e = \sqrt{s'u'}.$$

Man erhält daher den Satz:

Wenn zwischen den Elementen a, b, c, e des Borchardtschen Mittels die Gleichung besteht:

$$2a = \frac{bc}{e} + \frac{be}{c} + \frac{ce}{b},$$

und die Ungleichheiten:

$$e < \frac{bc}{b+c} < c < b$$

gelten, so lässt sich das Mittel g aus vier Elementen auf Mittel aus zwei, ebenfalls reellen Elementen zurückführen, und zwar ist:

$$\frac{1}{g} = \frac{p}{2}\left\{\frac{1}{\mathrm{M}(p,s)\mathrm{M}(u,u')} + \frac{1}{\mathrm{M}(p,u)\mathrm{M}(s,s')}\right\},$$

worin:

$$u'u' = uu - pp, \quad s's' = ss - pp.$$

Die gegenseitige Abhängigkeit zwischen p, s, u, und b, c, e wird durch die Gleichungen bestimmt:

$$\begin{array}{lll} b = \sqrt{su}, & \beta = \dfrac{bc}{2e}, & p = 2\gamma, \\ & & u = \sqrt{(\beta+\gamma)^2-\varepsilon^2} - \sqrt{(\beta-\gamma)^2-\varepsilon^2}, \\ c = \dfrac{\sqrt{su}\sqrt{s'u'}}{p}, & \gamma = \dfrac{be}{2c}, & s = \sqrt{(\beta+\gamma)^2-\varepsilon^2} + \sqrt{(\beta-\gamma)^2-\varepsilon^2}, \\ & & u' = \sqrt{\beta^2-(\gamma-\varepsilon)^2} - \sqrt{\beta^2-(\gamma+\varepsilon)^2}, \\ e = \sqrt{s'u'}, & \varepsilon = \dfrac{ce}{2b}, & s' = \sqrt{\beta^2-(\gamma-\varepsilon)^2} + \sqrt{\beta^2-(\gamma+\varepsilon)^2}. \end{array}$$

Wie schon die Form der Bedingungsgleichung zwischen a, b, c, e zeigt, besteht dieselbe nicht für die Elemente der folgenden Stufen des Algorithmus, da sich a demselben Grenzwerthe nähern muss wie b, c, e.

Es möge erlaubt sein, ein zu den obigen Gleichungen vollständig berechnetes Beispiel, in seinen Resultaten mitzutheilen.

Gegeben:

$$b = 4 \quad c = 2 \quad e = 1.$$

Daraus erhält man:

$$a = 5{,}250 \quad p = 2{,}0 \quad u = 2{,}004181\ldots \quad s = 7{,}983312\ldots$$

$$u' = 0{,}129390\ldots \quad s' = 7{,}728727\ldots$$

$$\mathrm{M}(p, s) = 4{,}479887\ldots \quad \mathrm{M}(u, u') = 0{,}762323\ldots$$

$$\mathrm{M}(p, u) = 2{,}002089\ldots \quad \mathrm{M}(s, s') = 7{,}855490\ldots$$

$$\frac{1}{\mathrm{M}(p, s)\mathrm{M}(u, u')} = 0{,}292817\ldots \quad \frac{1}{\mathrm{M}(p, u)\mathrm{M}(s, s')} = 0{,}063583\ldots$$

$$\frac{p}{2}\left\{\frac{1}{\mathrm{M}(p, s)\mathrm{M}(u, u')} + \frac{1}{\mathrm{M}(p, u)\mathrm{M}(s, s')}\right\} = 0{,}356400\ldots$$

Die directe Berechnung von g nach dem Algorithmus des Mittels aus vier Elementen ergab den angenäherten Werth:

$$\frac{1}{g} = 0{,}356401\ldots$$

— Eine nähere Betrachtung des Ausdrucks in der eben abgeleiteten Formel für $\frac{1}{g}$ zeigt, dass dieser, als Function der drei Argumente p, s, u angesehen, ebenfalls demselben Grenzwerthe sich nähert, wenn in den Mitteln M die Argumente nicht nach dem *Gauss*ischen Algorithmus geändert werden, sondern den oben (pag. 117) angegebenen befolgen. Für welche Ausdrücke überhaupt beide Algorithmen denselben Werth liefern, ergeben die im Folgenden abgeleiteten Relationen, welche zwischen den n^{ten} Gliedern derselben bestehen. Mit Beibehaltung der oben (pag. 123) angewandten Bezeichnung ist:

$$f_1 = \sqrt{\varphi . \psi}, \quad \varphi_1 = \frac{\varphi + f}{2}\sqrt{\frac{\psi}{f}}, \quad \varrho_1 = \frac{\varphi - f}{2}\sqrt{\frac{\psi}{f}}, \quad \varrho_1\varrho_1 = \varphi\varphi - ff,$$

und wenn die grossen Buchstaben $F_n(\varphi)$, Φ_n die Glieder des aus den Grössen $F_0 = f$, $\Phi_0 = \varphi$ abgeleiteten *Gauss*ischen Algorithmus bezeichnen:

$$F_1(\varphi) = \sqrt{\varphi . f}, \quad \Phi_1 = \frac{\varphi + f}{2}, \quad P_1 = \frac{\varphi - f}{2}, \quad P_1 P_1 = \Phi_1\Phi_1 - F_1(\varphi) . F_1(\varphi),$$

so wird also:

$$f_1 = F_1(\varphi) . \sqrt{\frac{\psi}{f}}, \quad \varphi_1 = \Phi_1 . \sqrt{\frac{\psi}{f}}, \quad \varrho_1 = P_1 . \sqrt{\frac{\psi}{f}}.$$

Seien allgemein bis zu den $(n-1)$ Gliedern die Gleichungen nachgewiesen:

$$(1.)\quad \begin{cases} f_{n-1} = F_{n-1}(\varphi)\cdot\sqrt{\prod\limits_{\nu=0}^{n-2}\dfrac{\psi_\nu}{f_\nu}}, \qquad \varphi_{n-1} = \Phi_{n-1}\cdot\sqrt{\prod\limits_{\nu=0}^{n-2}\dfrac{\psi_\nu}{f_\nu}}, \\ \varrho_{n-1} = P_{n-1}\cdot\sqrt{\prod\limits_{\nu=0}^{n-2}\dfrac{\psi_\nu}{f_\nu}}, \end{cases}$$

(in den Producten sind für $\nu=0$ die Elemente ψ, f selbst zu setzen).

Es soll das Bestehen dieser Gleichungen für die n^{ten} Glieder des Algorithmus gezeigt werden: es ist der Definition nach

$$f_n = \sqrt{\varphi_{n-1}\cdot\psi_{n-1}}, \quad \varphi_n = \frac{\varphi_{n-1}+f_{n-1}}{2}\sqrt{\frac{\psi_{n-1}}{f_{n-1}}}, \quad \varrho_n = \frac{\varphi_{n-1}-f_{n-1}}{2}\sqrt{\frac{\psi_{n-1}}{f_{n-1}}},$$

$$F_n(\varphi) = \sqrt{\Phi_{n-1}\cdot F_{n-1}(\varphi)}, \quad \Phi_n = \frac{\Phi_{n-1}+F_{n-1}(\varphi)}{2}, \quad P_n = \frac{\Phi_{n-1}-F_{n-1}(\varphi)}{2},$$

also ist nach der Voraussetzung (1.):

$$f_n = \sqrt{\psi_{n-1}}\sqrt{\Phi_{n-1}}\sqrt{\sqrt{\prod_{\nu=0}^{n-2}\frac{\psi_\nu}{f_\nu}}}.$$

Die erste der Gleichungen (1.) können wir in die Form setzen:

$$1 = \sqrt{\left\{\frac{F_{n-1}(\varphi)}{f_{n-1}}\cdot\sqrt{\prod_{\nu=0}^{n-2}\frac{\psi_\nu}{f_\nu}}\right\}},$$

da für alle Quadratwurzeln hier immer der positive Werth zu nehmen ist. Die Multiplication der beiden letzten Gleichungen ergiebt:

$$f_n = \sqrt{F_{n-1}(\varphi)}\cdot\sqrt{\Phi_{n-1}}\cdot\sqrt{\frac{\psi_{n-1}}{f_{n-1}}}\sqrt{\prod_{\nu=0}^{n-2}\frac{\psi_\nu}{f_\nu}} = F_n(\varphi)\sqrt{\prod_{\nu=0}^{n-1}\frac{\psi_\nu}{f_\nu}}.$$

Unmittelbar folgt:

$$(2.)\quad \begin{cases} \varphi_n = \dfrac{\Phi_{n-1}+F_{n-1}(\varphi)}{2}\sqrt{\prod\limits_{\nu=0}^{n-1}\dfrac{\psi_\nu}{f_\nu}} = \Phi_n\cdot\sqrt{\prod\limits_{\nu=0}^{n-1}\dfrac{\psi_\nu}{f_\nu}}, \\ \varrho_n = \dfrac{\Phi_{n-1}-F_{n-1}(\varphi)}{2}\sqrt{\prod\limits_{\nu=0}^{n-1}\dfrac{\psi_\nu}{f_\nu}} = P_n\cdot\sqrt{\prod\limits_{\nu=0}^{n-1}\dfrac{\psi_\nu}{f_\nu}}, \end{cases}$$

so dass:

$$(3.)\quad \frac{\varphi_n}{f_n} = \frac{\Phi_n}{F_n(\varphi)}$$

wird. Analog würde sich ergeben, wenn:

$$f_n = \sqrt{\varphi_{n-1}\psi_{n-1}}, \quad \psi_n = \frac{\psi_{n-1}+f_{n-1}}{2}\sqrt{\frac{\varphi_{n-1}}{f_{n-1}}}; \quad \sigma_n = \frac{\psi_{n-1}-f_{n-1}}{2}\sqrt{\frac{\varphi_{n-1}}{f_{n-1}}};$$

$$\sigma_n\sigma_n = \psi_n\psi_n - f_n f_n,$$

und:

$$F_1(\psi) = \sqrt{\psi.f}, \quad \Psi_1 = \frac{\psi+f}{2}, \quad \Sigma_1 = \frac{\psi-f}{2},$$

allgemein:

$$F_n(\psi) = \sqrt{\Psi_{n-1} F_{n-1}(\psi)}, \quad \Psi_n = \frac{\Psi_{n-1} + F_{n-1}(\psi)}{2}, \quad \Sigma_n = \frac{\Psi_{n-1} - F_{n-1}(\psi)}{2},$$

ist, dass die Gleichungen bestehen:

$$(4.) \quad f_n = F_n(\psi) \cdot \sqrt{\prod_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{\varphi_\nu}{f_\nu}}, \quad \psi_n = \Psi_n \cdot \sqrt{\prod_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{\varphi_\nu}{f_\nu}}, \quad \sigma_n = \Sigma_n \cdot \sqrt{\prod_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{\varphi_\nu}{f_\nu}},$$

woraus sich ergiebt:

$$(5.) \quad \frac{\psi_n}{f_n} = \frac{\Psi_n}{F_n(\psi)},$$

so dass also in Folge von (3.) und (5.) die Gleichungen (2.) und (4.) auch in folgender Form geschrieben werden können:

$$(6.) \begin{cases} f_n = F_n(\varphi) \cdot \sqrt{\prod_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{\Psi_\nu}{F_\nu(\psi)}}, \quad \varphi_n = \Phi_n \cdot \sqrt{\prod_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{\Psi_\nu}{F_\nu(\psi)}}, \quad \varrho_n = P_n \cdot \sqrt{\prod_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{\Psi_\nu}{F_\nu(\psi)}}, \\ f_n = F_n(\psi) \cdot \sqrt{\prod_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{\Phi_\nu}{F_\nu(\varphi)}}, \quad \psi_n = \Psi_n \cdot \sqrt{\prod_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{\Phi_\nu}{F_\nu(\varphi)}}, \quad \sigma_n = \Sigma_n \cdot \sqrt{\prod_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{\Phi_\nu}{F_\nu(\varphi)}}, \end{cases}$$

wenn:

$$F_0(\varphi) = f = F_0(\psi),$$

ist. Die beiden Darstellungen für f_n ergeben:

$$\frac{1}{F_n(\psi)} \cdot \sqrt{\prod_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{\Psi_\nu}{F_\nu(\psi)}} = \frac{1}{F_n(\varphi)} \cdot \sqrt{\prod_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{\Phi_\nu}{F_\nu(\varphi)}},$$

also einen Ausdruck, der von dem zweiten Elemente des Mittels, nämlich φ, resp. ψ ganz unabhängig ist. Setzen wir $\varphi = f$, so erhält die rechte Seite der Gleichung den Werth: $\frac{1}{f}$, und es entsteht unmittelbar die bekannte Formel:

$$F_n(\psi) = f \sqrt{\prod_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{\Psi_\nu}{F_\nu(\psi)}}.$$

Führen wir dieses, resp. das analoge des $F_n(\varphi)$ in die Gleichungen (6.) ein, so erhalten diese die schliesslichen Formen:

$$f_n = \frac{F_n(\varphi) \cdot F_n(\psi)}{f}, \quad \varphi_n = \frac{\Phi_n \cdot F_n(\psi)}{f}, \quad \psi_n = \frac{\Psi_n \cdot F_n(\varphi)}{f},$$

$$\varrho_n = \frac{P_n \cdot F_n(\psi)}{f}, \quad \sigma_n = \frac{\Sigma_n \cdot F_n(\varphi)}{f},$$

Hieraus folgt unmittelbar:

$$\frac{\mathrm{M}(F_n(\varphi), \Phi_n)}{\mathrm{M}(\Phi_n, P_n)} = \frac{\mathrm{M}(f_n, \varphi_n)}{\mathrm{M}(\varphi_n, \varrho_n)}, \quad \frac{\mathrm{M}(F_n(\psi), \Psi_n)}{\mathrm{M}(\Psi_n, \Sigma_n)} = \frac{\mathrm{M}(f_n, \psi_n)}{\mathrm{M}(\psi_n, \sigma_n)},$$

und da bekanntlich:

$$\mathrm{M}(\varphi, \varrho) = \mathrm{M}(\Phi_n, P_n) \cdot 2^n,$$

ist, so wird:

$$\frac{\mathrm{M}(f, \varphi)}{\mathrm{M}(\varphi, \varrho)} + \frac{\mathrm{M}(f, \psi)}{\mathrm{M}(\psi, \sigma)} = \frac{1}{2^n} \left\{ \frac{\mathrm{M}(f_n, \varphi_n)}{\mathrm{M}(\varphi_n, \varrho_n)} + \frac{\mathrm{M}(f_n, \psi_n)}{\mathrm{M}(\psi_n, \sigma_n)} \right\}.$$

Oben (pag. 128) war abgeleitet:

$$\frac{M(f,\varphi)M(f,\psi)}{f} = \frac{M(f_n,\varphi_n)M(f_n,\psi_n)}{f_n}.$$

Die Division dieser beiden Gleichungen ergiebt:

$$f\left\{\frac{1}{M(f,\psi)M(\varphi,\varrho)}+\frac{1}{M(f,\varphi)M(\psi,\sigma)}\right\} = \frac{f_n}{2^n}\left\{\frac{1}{M(f_n,\psi_n)M(\varphi_n,\varrho_n)}+\frac{1}{M(f_n,\varphi_n)M(\psi_n,\sigma_n)}\right\}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber, wenn wir

$$f = p,$$
$$\psi = s, \quad \sigma = s',$$
$$\varphi = u, \quad \varrho = u'$$

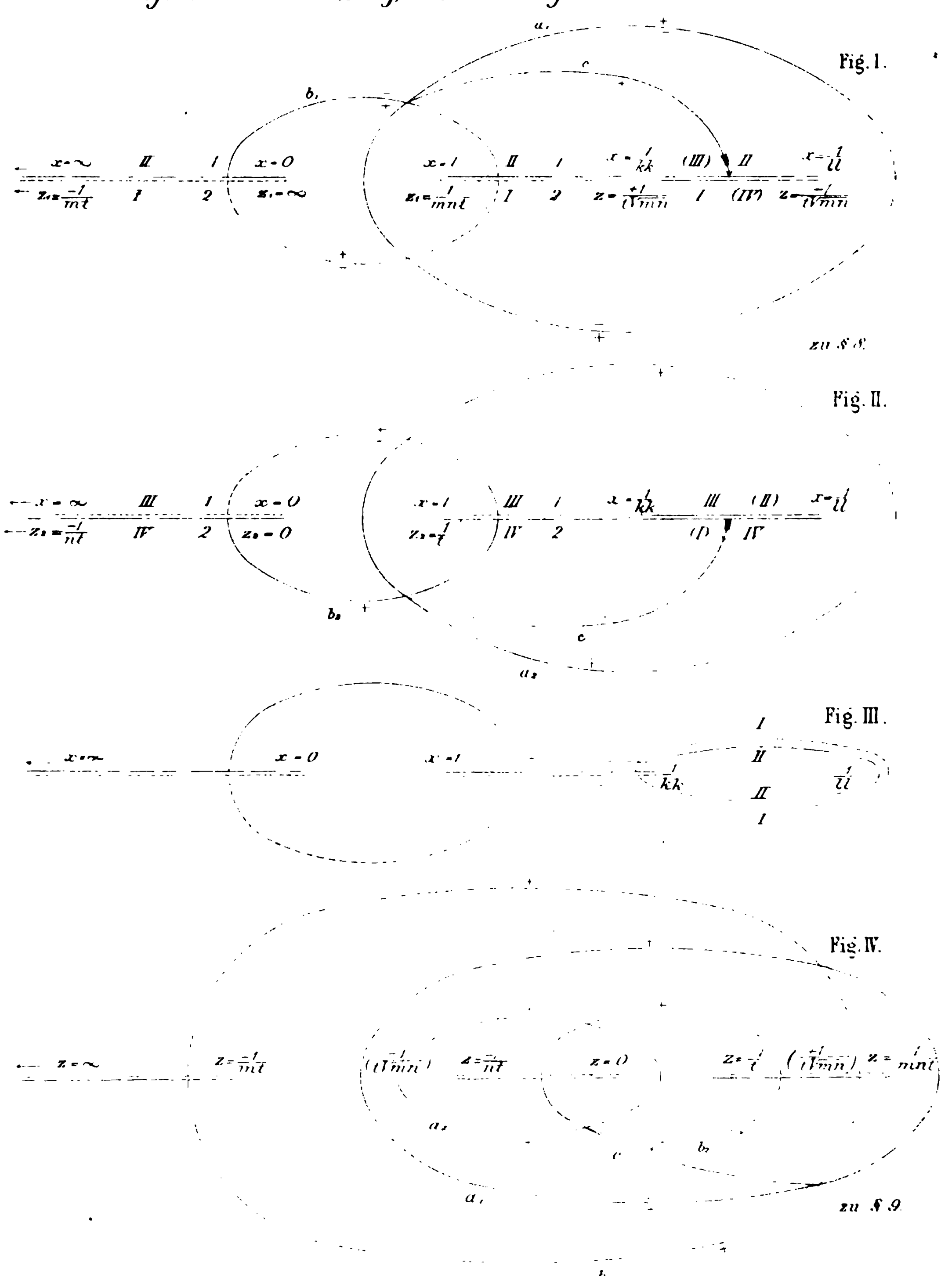
setzen, abgesehen vom Factor $\frac{1}{2}$, genau gleich dem in der obigen Formel (pag. 166) vorkommenden Ausdrucke, und es ist also hierdurch, auch mit Hülfe der Theorie des Mittels aus zwei Elementen, gezeigt, dass jener Ausdruck bei der Aenderung der Argumente nach einem ***dreigliedrigen*** Algorithmus seinen Werth nicht ändert.

Anmerkung. Analog, wie sich nach dem früher Abgeleiteten aus einem Producte zweier ***Gauss***ischen Mittel eine Function dreier Argumente bilden lässt, deren Werth ungeändert bleibt, wenn die Argumente nach einem bestimmten Algorithmus sich ändern, so kann man durch das Product von A. G. Mitteln eine Function von mehr als drei Argumenten darstellen, die ebenfalls jene Eigenschaft besitzt.

Göttingen, im October 1877.

Abdruck aus dem „Journal für die reine und angewandte Mathematik" Bd. 85.
Druck von G. Reimer in Berlin.

Figuren zu: Karl Schering, Arithmetisch-geometrisches Mittel.



Ueber ein
Problem der analytischen Mechanik, welches auf hyperelliptische Transcendente II. und III. Gattung führt.

INAUGURAL-DISSERTATION

MIT GENEHMIGUNG

DER PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER VEREINIGTEN FRIEDRICHS-UNIVERSITÄT

HALLE-WITTENBERG

ZUR

ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOCTORWÜRDE

ZUGLEICH MIT DEN THESEN

ÖFFENTLICH VERTHEIDIGT

AM

XXI. OCTOBER MDCCCLXXXII

VON

ADOLF OHNESORGE

AUS WRIEZEN A/O.

OPPONENTEN:

H. GRASSMANN, GYMNASIALLEHRER.

A. HERMANN, DR. PHIL.

HALLE A/S.

1882.

SEINEM HOCHVEREHRTEN LEHRER

HERRN DIRECTOR PROFESSOR MARTUS

IN DANKBARKEIT

GEWIDMET

VOM

VERFASSER.

§ I.

„Eine um eine feste verticale Axe drehbare im Uebrigen beliebig gestaltete Masse trägt eine zweite verticale Axe, welche nicht fest ist und demnach bei der Drehung der Masse um die feste Axe mit herumgeführt werden würde. Mit dieser Masse wird nun mittelst der Secundäraxe eine zweite ebenfalls beliebig gestaltete Masse derart verbunden, dass sie um die Secundäraxe frei herumschwingen kann. Es soll die Bewegung des so construirten Systems untersucht werden, wenn den beiden Massen durch irgend welche Stösse gewisse Anfangsgeschwindigkeiten imprimirt worden sind."

Zunächst denken wir uns eine Horizontalprojection unserer Vorrichtung entworfen. Durch O_1 gehe die feste, durch O_2 die bewegliche Axe des Systems. Der senkrechte Abstand beider Axen von einander sei r. Die Masse, welche die feste Axe enthält, werde durch M_1, die andere durch M_2 repräsentirt. Ausserdem soll der Girationsradius von M_1 in Bezug auf die durch O_1 gehende Axe mit ϱ_1, der Girationsradius der Masse M_2 in Bezug auf eine durch ihren eigenen Schwerpunkt gehende verticale Axe mit ϱ_2 bezeichnet werden. Und schliesslich habe der Schwerpunkt der Masse M_2 von der durch O_2 gehenden Axe den senkrechten Abstand s.

In der Horizontalprojection werde nunmehr ein rechtwinkliges Coordinatenkreuz construirt, dessen Anfangspunkt in O_1 liegt. Ferner wollen wir statt der rechtwinkligen Coordinaten des Schwerpunktes von $M_2 : \xi, \eta$ als unabhängige Variabele die Winkel ψ und ω einführen, indem wir mit ψ den Winkel bezeichnen, welcher durch r und die positive Richtung der ξ-Axe gebildet wird, und mit ω denjenigen der von r und s eingeschlossenen Winkel, welcher mit ψ auf derselben Seite von r liegt. Alsdann sind die neuen Veränderlichen mit ξ und η durch die beiden folgenden Relationen verknüpft:

$$1. \quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= r \,.\, \cos\psi - s \,.\, \cos(\psi + \omega) \\ \eta &= r \,.\, \sin\psi - s \,.\, \sin(\psi + \omega). \end{aligned} \right.$$

Die Bedingungsgleichungen, welche die Verbindungen der Massen unserer Vorrichtung repräsentiren, enthalten die Zeit t explicite nicht; somit liefert uns der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft die Differentialgleichung:

$$2. \quad T = h,$$

wenn T die absolute lebendige Kraft des ganzen Systems, h eine Constante bedeutet.

Jacobi zeigt nun in seiner Dynamik, dass die absolute lebendige Kraft eines Massensystems gleich der relativen lebendigen Kraft des Systems in Beziehung auf den Schwerpunkt vermehrt um die absolute lebendige Kraft des Schwerpunktes ist.

Unter Anwendung dieses Satzes gewinnt man für die lebendige Kraft T den Ausdruck:

$$3. \quad T = \tfrac{1}{2} M_1 \varrho_1^2 \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2} M_2 \left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\right] + \tfrac{1}{2} M_2 \varrho_2^2 \left[\frac{d\psi}{dt} + \frac{d\omega}{dt}\right]^2.$$

Für die hierin auftretenden Differentialquotienten ξ' und η' ergeben sich durch Differentiation der Gleichungen 1. die folgenden Werthe:

$$4. \ldots \quad \begin{cases} \xi' = -r \sin\psi \,.\, \psi' + s \,.\, \sin(\psi+\omega) \,.\, (\psi'+\omega') \\ \eta' = r \cos\psi \,.\, \psi' + s \,.\, \cos(\psi+\omega) \,.\, (\psi'+\omega'). \end{cases}$$

Und mit Rücksicht auf die in 3. und 4. gegebenen Beziehungen erscheint die Gleichung 2. nunmehr unter der Gestalt:

$$\tfrac{1}{2} M_1 \varrho_1^2 \psi'^2 + \tfrac{1}{2} M_2 \left\{(r^2+s^2+\varrho_2^2-2rs\cos\omega)\psi'^2 + (s^2+\varrho_2^2)\omega'^2 + 2(s^2+\varrho_2^2-rs\cos\omega)\psi'.\omega'\right\} = h.$$

Setzen wir noch $h' = \frac{2h}{M_2}$ und $M_1 = \varepsilon M_2$, wo ε einen Zahlenfactor bedeutet, so erhalten wir endgültig als erste Bewegungsgleichung:

$$5. \quad (r^2+s^2+\varrho_2^2+\varepsilon\varrho_1^2-2rs\cos\omega)\psi'^2 + (s^2+\varrho_2^2)\omega'^2 + 2(s^2+\varrho_2^2-rs\cos\omega)\psi'\omega' = h'.$$

Zur zweiten Bewegungsgleichung verhilft hier eine der Lagrange'schen Differentialgleichungen:

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial q_n'} = \frac{\partial(T+U)}{\partial q_n}.$$

Da in unserem Falle U constant ist und überdies die lebendige Kraft das Azimuth ψ explicite nicht enthält, so resultirt unmittelbar:

$$6. \ldots \quad \frac{\partial T}{\partial \psi'} = c$$

oder wenn wir die hierin angedeutete partielle Differentiation nach ψ' ausführen:

$$M_2\left\{(r^2+s^2+\varrho_2^2+\varepsilon\varrho_1^2-2rs\cos\omega)\psi' + (s^2+\varrho_2^2-rs\cos\omega)\omega'\right\} = c$$

und schliesslich, wenn $c' = \frac{c}{M_2}$ gesetzt wird:

$$7. \ldots \quad (r^2+s^2+\varrho_2^2+\varepsilon\varrho_1^2-2rs\cos\omega)\psi' + (s^2+\varrho_2^2-rs\cos\omega)\omega' = c'.$$

Als Ausdruck für die Winkelgeschwindigkeit ψ' resultirt hieraus direct:

$$8. \ldots \quad \psi' = \frac{c'-(s^2+\varrho_2^2-rs\cos\omega)\omega'}{r^2+s^2+\varrho_2^2+\varepsilon\varrho_1^2-2rs\cos\omega},$$

wofür man mit Rücksicht auf Gleichung 5. auch schreiben kann:

$$9. \ldots \quad \psi' = \frac{h'-(s^2+\varrho_2^2)\omega'^2}{c'+(s^2+\varrho_2^2-rs\cos\omega)\omega'}.$$

Aus den Gleichungen 8. und 9. fliesst nun der folgende Werth für die relative Winkelgeschwindigkeit ω':

$$10. \ldots \quad \omega' = \pm\sqrt{\frac{h'(r^2+s^2+\varrho_2^2+\varepsilon\varrho_1^2-2rs\cos\omega)-c'^2}{(s^2+\varrho_2^2)(r^2+\varepsilon\varrho_1^2)-r^2s^2\cos^2\omega}}$$

Indem wir hierin noch der Kürze halber die folgenden Bezeichnungen einführen:

$$A = \frac{r^2+s^2+\varrho_2^2+\varepsilon\varrho_1^2}{2rs}; \quad B = \frac{(s^2+\varrho_2^2)(r^2+\varepsilon\varrho_1^2)}{r^2s^2}; \quad C = \frac{c'^2}{8rsh'}; \quad D = A - 4C$$

bekommen wir die leichter zu übersehende Relation:

$$11. \ldots \quad \omega' = \pm\sqrt{\frac{2h'}{rs}}\cdot\sqrt{\frac{D-\cos\omega}{B-\cos^2\omega}}.$$

Uebrigens erkennt man, dass die Constanten A, B, C stets positiv, A und B sogar stets grösser als 1 sind. Auch überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der Ungleichung: $A > \sqrt{B}$.

Durch Substitution des zuletzt für ω' gewonnenen Ausdrucks in Gleichung 8. erscheint ψ' als Function von ω:

$$12. \quad \psi' = \frac{rs}{r^2 + s\varrho_1^2}\sqrt{\frac{2h'}{rs}} \cdot \frac{\frac{r^2 + s\varrho_1^2}{rs} \cdot 2\sqrt{C} \mp \left(B - \frac{r^2 + s\varrho_1^2}{rs}\cos\omega\right)\sqrt{\frac{D - \cos\omega}{B - \cos^2\omega}}}{2\,(A - \cos\omega)}.$$

Dividirt man diese Gleichung durch die Gleichung 11., so erhält man die wichtige Beziehung:

$$13. \quad \frac{d\psi}{d\omega} = \frac{\pm\sqrt{C}}{A - \cos\omega}\sqrt{\frac{B - \cos^2\omega}{D - \cos\omega}} - \frac{\frac{rs}{r^2 + s\varrho_1^2} \cdot B - \cos\omega}{2\,(A - \cos\omega)}.$$

Das positive Vorzeichen gilt, wenn ω' positiv ist, das negative, wenn ω' negativ ist.

§ II.

Um eine Vorstellung von der interessanten Bewegung unseres Doppelpendels zu erlangen, wenden wir uns jetzt zu einer eingehenderen Discussion der Winkelgeschwindigkeiten. Für die relative Winkelgeschwindigkeit ω' hatte sich ergeben:

$$1. \quad \omega' = \pm\sqrt{\frac{2h'}{rs}}\sqrt{\frac{D - \cos\omega}{B - \cos^2\omega}}.$$

Eine leicht anzustellende Betrachtung lehrt, dass der stets positive Nenner des Radicanden zwischen den folgenden Grenzen liegt:

$$2. \quad \frac{r^2\varrho_2^2 + s\varrho_1^2(s^2 + \varrho_2^2)}{r^2 s^2} \leqq B - \cos^2\omega \leqq \frac{(s^2 + \varrho_2^2)(r^2 + s\varrho_1^2)}{r^2 s^2}.$$

Da der Factor $\sqrt{\frac{2h'}{rs}}$ stets reell ist, so fällt ω' reell aus so lange D zwischen -1 und $+\infty$ liegt, d. h. so lange die Ungleichung:

$$-1 \leqq D < +\infty$$

erfüllt ist.

Hierbei sind zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden.

Erstens. Liegt D in dem Intervall:

$$+1 < D < +\infty,$$

so vermag ω alle Werthe von 0 bis 2π zu durchlaufen. Die Masse M_2 oder das secundäre System wird, da ja ω' hier nie auf den Werth Null herabsinken kann, um O_2 ununterbrochen in der Richtung rotiren, welche seiner Anfangsbewegung entspricht.

Zweitens. Liegt D in dem Intervall:

$$-1 < D < +1,$$

so wird, wenn wir $D = \cos\sigma$ setzen, ω' für $\omega = \sigma$ und $\omega = 2\pi - \sigma$ verschwinden. Der einen

dieser beiden Lagen würde hiernach das Maximum, der anderen das Minimum von ω entsprechen. Und da für ein $\omega > 2\pi - \sigma$ die relative Winkelgeschwindigkeit imaginär ausfällt und überdies die relative Winkelbeschleunigung:

$$3. \quad \frac{d^2 \omega}{d t^2} = \frac{\sin \omega \, (h' - rs \, . \cos \omega \, . \, \omega'^2)}{rs\,(B - \cos^2 \omega)}$$

für $\omega = \sigma$, $2\pi - \sigma$ nicht verschwindet, so wird das Secundärsystem M_2, nachdem sein Schwerpunkt die Lage $\omega = 2\pi - \sigma$ eingenommen hat, eine rückläufige Bewegung beginnen, d. h. seine Geschwindigkeit negativ werden müssen, wodurch gleichzeitig das doppelte Vorzeichen seine mechanische Erklärung erhält.

In dem Grenzfalle $D = -1$ bleibt ω während der ganzen Bewegung constant gleich π und in dem anderen Grenzfalle $D = +1$ wird der Schwerpunkt von M_2 erst in der Lage $\omega = 2\pi$ zur Ruhe kommen.

Im Allgemeinen erwirbt nun ω' Maximal- resp. Minimalwerthe, wenn $\frac{d\omega'}{d\omega}$ oder was auf dasselbe hinausläuft $\frac{d^2 \omega}{dt^2}$ verschwindet.

Aus Gleichung 3. ist ersichtlich, dass $\frac{d^2 \omega}{dt^2}$ zu Null wird für:

$$4. \quad \begin{cases} \omega = 0, \pi, 2\pi, \ldots \text{ und für die beiden aus der Relation} \\ \cos \tau = D - \sqrt{D^2 - B} \text{ zu entnehmenden Winkel:} \\ \omega = \tau, 2\pi - \tau. \end{cases}$$

Auch erkennt man, dass, da τ mechanische Bedeutung nur dann hat, wenn $D \geqq \frac{B+1}{2}$ ist, dieser Winkel lediglich bei vollständigen Umschwingungen des Secundärsystems in Betracht kommt.

Um zu entscheiden, welchen von den oben angegebenen Winkelwerthen die Maxima und welchen die Minima der relativen Winkelgeschwindigkeit entsprechen, müssen wir auf den zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2 \omega'}{d \omega^2}$ oder, was für unseren Zweck auf dasselbe hinauskommt, auf den Ausdruck:

$$5. \quad \frac{d^3 \omega}{dt^3} = \frac{\omega'}{rs\,(B - \cos^2 \omega)} \left\{ rs \, . \sin \omega \, (\sin \omega \, . \, \omega'^2 - 2 \cos \omega \, . \, \omega'') + \right.$$
$$\left. + \frac{\cos \omega \, (B - 1 - \sin^2 \omega)\,(h' - rs \cos \omega \, . \, \omega'^2)}{B - \cos^2 \omega} \right\}$$

recurriren, in welchem wie vorher $\omega' = \frac{d\omega}{dt}$ und $\omega'' = \frac{d^2 \omega}{dt^2}$ gesetzt ist.

Erstens. Liegt nun D in dem Intervall:

$$+1 < D < +\infty$$

und setzen wir unbeschadet der Allgemeinheit unserer Untersuchung voraus, dass das Secundärsystem positive Umschwingungen ausführt, so sind folgende Nebenfälle zu unterscheiden:

$$(a) \quad 1 < D < \frac{B+1}{2}.$$

Hier besitzt τ keine reale Geltung und da $\left[\frac{d^3\omega}{dt^3}\right]_{\omega=0,2\pi,\ldots} > 0$ und $\left[\frac{d^3\omega}{dt^3}\right]_{\omega=\pi,3\pi,\ldots} < 0$ ist, so erwirbt die relative Winkelgeschwindigkeit ω' bei $\omega = 0, 2\pi, \ldots$ ein Minimum und bei $\omega = \pi, 3\pi, \ldots$ ein Maximum.

$$(b) \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{B+1}{2} < D < \infty.$$

Unter dieser Bedingung ist:

$$\left[\frac{d^3\omega}{dt^3}\right]_{\omega=0,2\pi,\ldots} < 0; \quad \left[\frac{d^3\omega}{dt^3}\right]_{\omega=\pi,3\pi,\ldots} < 0; \quad \left[\frac{d^3\omega}{dt^3}\right]_{\omega=\tau,2\pi-\tau} > 0,$$

d. h. die relative Winkelgeschwindigkeit ω' sinkt während eines Umlaufes zweimal und zwar bei $\omega = \tau$ und bei $\omega = 2\pi - \tau$ auf ein Minimum herab, während sie in den Lagen $\omega = 0$ und $\omega = \pi$ ihre beiden Maxima annimmt.

$$6. \;\ldots\quad \text{Ist } \omega = \tau, 2\pi-\tau, \text{ so ist } \omega' = \omega_1' = +\sqrt{\frac{2h'}{rs}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\left[D-\sqrt{D^2-B}\right]}}$$

$$7. \;\ldots\quad \text{„} \;\omega = 0, 2\pi, \ldots \;\text{„}\;\text{„}\; \omega' = \omega_2' = +\sqrt{\frac{2h'}{rs}} \cdot \sqrt{\frac{D-1}{B-1}}$$

$$8. \;\ldots\quad \text{„} \;\omega = \pi, 3\pi, \ldots \;\text{„}\;\text{„}\; \omega' = \omega_3' = +\sqrt{\frac{2h'}{rs}} \; \sqrt{\frac{D+1}{B-1}}.$$

Ist übrigens $D = \frac{B+1}{2}$, so wird $\tau = 0, 2\pi, \ldots$ und

$$\omega_1' = \omega_3' = +\sqrt{\frac{h'}{rs}} \qquad \omega_2' = +\sqrt{\frac{h'}{rs}} \cdot \sqrt{\frac{B+3}{B-1}}.$$

Bei $\omega = 0, 2\pi, \ldots$ findet also das Maximum, bei $\omega = \pi, 3\pi, \ldots$ das Minimum von ω' statt.

Macht das Secundärsystem negative Umschwingungen, so erwirbt ω' in allen den Lagen Maximalwerthe, wo für die unter (*a*) und (*b*) discutirten Fälle Minima stattfinden, und überall da Minimalwerthe, wo vorher Maxima erreicht werden.

Zweitens. Liegt D in dem Intervall:

$$-1 < D < +1,$$

so besitzt ω' offenbar in $\omega = \pi$ sein Maximum oder sein Minimum je nachdem diese Stelle vom Secundärsystem in positivem oder negativem Sinne passirt wird.

Für das Maximum gilt der Ausdruck:

$$\omega' = +\sqrt{\frac{2h'}{rs}} \cdot \sqrt{\frac{\cos\sigma+1}{B-1}};$$

für das Minimum aber hat man:

$$\omega' = -\sqrt{\frac{2h'}{rs}} \cdot \sqrt{\frac{\cos\sigma+1}{B-1}}.$$

Wir untersuchen jetzt die Winkelgeschwindigkeit ψ', mit der das primäre System M_1 sich bewegt. Um vor allem zu entscheiden, für welche Lagen des Secundärsystems die Function ψ' verschwindet, recurriren wir am zweckmässigsten auf die beiden in 8. und 9. des § 1 gegebenen Ausdrücke. Wir hatten erhalten:

$$9. \quad \ldots\ldots\ldots \quad \psi' = \frac{c' - (s^2 + \varrho_2^2 - rs\cos\omega)\,\omega'}{r^2 + s^2 + \varrho_2^2 + \varepsilon\varrho_1^2 - 2rs\cos\omega}$$

$$10. \quad \ldots\ldots\ldots \quad \psi' = \frac{h' - (s^2 + \varrho_2^2)\,\omega'^2}{c' + (s^2 + \varrho_2^2 - rs\cos\omega)\,\omega'}.$$

Die Gleichung 10. lehrt, dass das Azimuth ψ Maximal- resp. Minimalwerthe erwirbt, sobald von der relativen Winkelgeschwindigkeit ω' der Werth:

$$\omega' = \pm\sqrt{\frac{h'}{s^2 + \varrho_2^2}}$$

erreicht werden kann.

Substituiren wir diesen Werth für ω' in Gleichung 9., so muss sein:

$$c' \mp (s^2 + \varrho_2^2 - rs\,.\cos\omega)\sqrt{\frac{h'}{s^2 + \varrho_2^2}} = 0.$$

Es wird demnach ψ' eventualiter nur für einen Winkel ω verschwinden können, welcher aus folgender Gleichung zu entnehmen ist:

$$\cos\omega = \frac{s^2 + \varrho_2^2}{rs} \mp \frac{c'}{rs}\sqrt{\frac{r^2 + \varrho_2^2}{h'}}.$$

Wir haben jetzt wieder die beiden Fälle, wo das Secundärsystem vollständige oder wo es pendelartige Schwingungen vollführt, gesondert zu betrachten.

Erstens. Macht die Masse M_2 vollständige Umschwingungen um die Axe O_2, so lautet die Bedingung für die Erreichbarkeit von $\omega' = \pm\sqrt{\frac{h'}{s^2 + \varrho_2^2}}$:

$$11. \quad \ldots\ldots \quad \left[\frac{s^2 + \varrho_2^2}{rs} - 1\right]^2 \leqq \frac{s^2 + \varrho_2^2}{r^2 s^2}\,.\,\frac{c'^2}{h'} \leqq \left[\frac{s^2 + \varrho_2^2}{rs} + 1\right]^2.$$

Unter dieser Bedingung aber wird, wie man ohne Mühe erkennt, nur der aus der Gleichung:

$$\cos\omega = \frac{s^2 + \varrho_2^2}{rs} - \frac{|c'|}{rs}\,.\sqrt{\frac{s^2 + \varrho_2^2}{h'}} = \cos\beta$$

entnommene Werth von ω mechanische Bedeutung beanspruchen, wenn wir mit $|c'|$ den absoluten Betrag von c' bezeichnen.

Der Winkel β fällt reell aus für:

I. $\frac{s^2 + \varrho_2^2}{rs} > 1$, wenn die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$12. \quad \ldots\ldots \quad \frac{s^2 + \varrho_2^2}{rs} - 1 \leqq \frac{|c'|}{rs}\sqrt{\frac{s^2 + \varrho_2^2}{h'}} \leqq \frac{s^2 + \varrho_2^2}{rs} + 1.$$

II. für: $\frac{s^2 + \varrho_2^2}{rs} < 1$, wenn die Ungleichung:

$$13. \quad \ldots\ldots \quad 1 - \frac{s^2 + \varrho_2^2}{rs} \leqq \frac{|c'|}{rs}\sqrt{\frac{s^2 + \varrho_2^2}{h'}} \leqq 1 + \frac{s^2 + \varrho_2^2}{rs}$$

befriedigt ist, wie man mit Hinzuziehung der Bedingung für die Erreichbarkeit von $\omega' = \pm\sqrt{\frac{h'}{s^2 + \varrho_2^2}}$ 'mittelbar findet.

Zweitens. Im Falle einer pendelartigen Bewegung des Secundärsystems gilt als analytisches Kennzeichen einer reellen Amplitude:

$$14. \quad \left[1-\frac{s^2+\varrho_2^2}{rs}\right]^2+\frac{\varrho_2^2}{s^2}+\frac{\varepsilon\varrho_1^2}{r^2s^2}<\frac{s^2+\varrho_2^2}{r^2s^2}\cdot\frac{c'^2}{h'}<\left[1+\frac{s^2+\varrho_2^2}{rs}\right]^2+\frac{\varrho_2^2}{s^2}+\frac{\varepsilon\varrho_1^2}{r^2s^2}.$$

Damit hier $\omega'=\pm\sqrt{\frac{h'}{s^2+\varrho_2^2}}$ überhaupt erreicht werden kann, muss mit Rücksicht auf die p. 5 für ω_2' und ω_3' gegebenen Ausdrücke die Ungleichung gelten:

$$\frac{s^2+\varrho_2^2}{r^2s^2}\cdot\frac{c'^2}{h'}\leqq\left[1+\frac{s^2+\varrho_2^2}{rs}\right]^2.$$

Aus alledem folgt, dass der Winkel β allein und zwar nur dann mechanische Geltung besitzen wird, wenn:

$$15. \quad \left[1-\frac{s^2+\varrho_2^2}{rs}\right]^2+\frac{\varrho_2^2}{s^2}+\frac{\varepsilon\varrho_1^2}{r^2s^2}\leqq\frac{s^2+\varrho_2^2}{rs}\cdot\frac{c'^2}{h'}\leqq\left[1+\frac{s^2+\varrho_2^2}{rs}\right]^2$$

und ausserdem: $r\leqq\frac{4s(s^2+\varrho_2^2)-\varepsilon\varrho_1^2}{\varrho_2^2}$ ist.

Uebrigens erhellt auch aus den vorstehenden Betrachtungen, dass unter den angegebenen Bedingungen für ein positives c' nur:

$$\omega'=+\sqrt{\frac{h'}{s^2+\varrho_2^2}},$$

für ein negatives c' nur:

$$\omega'=-\sqrt{\frac{h'}{s^2+\varrho_2^2}}$$

die Winkelgeschwindigkeit ψ' des primären Systems annulliren kann.

Um ein klares Bild von der Bewegung unserer Vorrichtung zu gewinnen, ist es nothwendig, auch die den Lagen $\omega=0,\pi,\tau$ entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten des primären Systems zu discutiren. Erinnern wir uns zunächst, dass für stets positive Umschwingungen der Masse M_2 ω' der Reihe nach folgende Werthe erlangt:

$$\text{für } \omega=\tau,\quad \omega_1'=+\sqrt{\frac{2h'}{rs}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\left[D-\sqrt{D^2-B}\right]}}$$

$$\text{„ } \omega=\pi,\quad \omega_3'=+\sqrt{\frac{2h'}{rs}}\cdot\sqrt{\frac{D+1}{B-1}}$$

$$\text{„ } \omega=0,\quad \omega_2'=+\sqrt{\frac{2h'}{rs}}\cdot\sqrt{\frac{D-1}{B-1}},$$

wobei: $\omega_1'<\omega_2'<\omega_3'$.

Man hat somit für die Winkelgeschwindigkeit ψ' folgende Werthe:

$$16. \quad \begin{cases} \text{in } \omega=0 \text{ ist } \psi'=\psi_2'=\dfrac{c'-(s^2+\varrho_2^2-rs)\,\omega_2'}{(r-s)^2+\varrho_2^2+\varepsilon\varrho_1^2} \\ \text{„ } \omega=\tau \text{ „ } \psi'=\psi_1'=\dfrac{c'-(s^2+\varrho_2^2-rs\cos\tau)\,\omega_1'}{r^2+s^2+\varrho_2^2+\varepsilon\varrho_1^2-2rs\cos\tau} \\ \text{„ } \omega=\pi \text{ „ } \psi'=\psi_3'=\dfrac{c'-(s^2+\varrho_2^2+rs)\,\omega_3'}{(r+s^2)+\varrho_2^2+\varepsilon\varrho_1^2}. \end{cases}$$

Diesen Ausdrücken lassen sich auch folgende Gestalten geben:

$$17. \ldots\ldots\ldots \begin{cases} \psi'_2 = \dfrac{h' - (s^2 + \varrho_2^2)\,\omega_2'^2}{c' + (s^2 + \varrho_2^2 - rs)\,\omega'_2} \\ \psi'_1 = \dfrac{h' - (s^2 + \varrho_2^2)\,\omega_1'^2}{c' + (s^2 + \varrho_2^2 - rs\cos\tau)\,\omega'_1} \\ \psi'_3 = \dfrac{h' - (s^2 + \varrho_2^2)\,\omega'_3}{c' + (s^2 + \varrho_2^2 + rs)\,\omega'_3}. \end{cases}$$

Setzen wir ω' als positiv voraus, so lehrt eine kurze vergleichende Betrachtung obiger Relationen, dass ψ' für $\omega = 0$ den grössten und für $\omega = \pi$ den kleinsten von allen überhaupt möglichen Werthen annehmen wird. Der Werth ψ'_1 kommt für unseren Zweck nicht in Betracht, da die Function ψ'' in $\omega = \tau$ von Null verschieden ist.

Je nach der Beschaffenheit der in den Gleichungen 16. und 17. auftretenden Constanten lassen sich vier Fälle unterscheiden.

I. Ist c' positiv und $\dfrac{s^2 + \varrho_2^2}{rs} > 1$, so wird

$$\psi'_2 \gtreqless 0 \text{ je nachdem } \left[1 - \frac{s^2 + \varrho_2^2}{rs}\right]^2 \lesseqgtr \frac{s^2 + \varrho_2^2}{r^2 s^2} \cdot \frac{c'^2}{h'}$$

und

$$\psi'_3 \gtreqless 0 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \left[1 + \frac{s^2 + \varrho_2^2}{rs}\right]^2 \lesseqgtr \frac{s^2 + \varrho_2^2}{r^2 s^2} \cdot \frac{c'^2}{h'}.$$

II. Ist c' positiv und $\dfrac{s^2 + \varrho_2^2}{rs} < 1$, so wird

ψ'_2 stets positiv ausfallen und $\psi'_3 \gtreqless 0$ je nachdem $\left[1 + \dfrac{s^2 + \varrho_2^2}{rs}\right]^2 \lesseqgtr \dfrac{s^2 + \varrho_2^2}{r^2 s^2} \cdot \dfrac{c'^2}{h'}$

III. Ist c' negativ und $\dfrac{s^2 + \varrho_2^2}{rs} > 1$, so werden

ψ'_2 und ψ'_3 immer negativ sein.

IV. Ist c' negativ und $\dfrac{s^2 + \varrho_2^2}{rs} < 1$, so wird

$$\psi'_2 \gtreqless 0 \text{ je nachdem } \left[1 - \frac{s^2 + \varrho_2^2}{rs}\right] \gtreqless \frac{s^2 + \varrho_2^2}{r^2 s^2} \cdot \frac{c'^2}{h'},$$

während ψ'_3 immer negativ ausfällt.

Schwingt die secundäre Masse M_2 pendelartig hin und her, d. h. nimmt ω' bald positive, bald negative Werthe an, so ist das Maximum von ω':

$$\omega'_2 = 2\sqrt{\frac{h'}{rs(B-1)}} \cdot \cos\frac{\sigma}{2},$$

das Minimum aber: $\omega'_1 = -\,\omega'_2.$

Beide Werthe werden in der Lage $\omega = \pi$ erworben.

Es wird demgemäss:

$$\psi'_2 = \frac{c' - (s^2 + \varrho_2^2 + rs)\,\omega'_2}{(r + s)^2 + \varrho_2^2 + \varepsilon\varrho_1^2}$$

der kleinste und

$$\psi'_1 = \frac{c' + (s^2 + \varrho_2^2 + rs)\,\omega'_2}{(r + s)^2 + \varrho_2^2 + \varepsilon\varrho_1^2}$$

der grösste Werth sein, den ψ' überhaupt annehmen kann.

Im Wesentlichen lassen sich hierbei zwei verschiedene Fälle unterscheiden:

I. Ist c' positiv, so wird ψ'_1 immer positiv ausfallen und $\psi'_2 \gtreqless 0$ je nachdem $\omega_2'^2 \lesseqgtr \frac{h'}{s^2+\varrho_2^2}$ ist.

II. Ist c' negativ, so wird $\psi'_1 \gtreqless 0$ je nachdem $\omega_2'^2 \gtreqless \frac{h'}{s^2+\varrho_2^2}$, und ψ'_2 immer negativ.

Aus diesen Verhältnissen möge als bemerkenswerthes Resultat hervorgehoben werden, dass unter Umständen die Function ψ' abwechselnd positive und negative Werthe annehmen kann. In diesem Falle würde mithin das Azimuth ψ einen Maximal- und einen Minimalwerth besitzen müssen.

§ III.

Auf Grund der bisher gewonnenen Resultate wollen wir jetzt die allgemeine Form der Bewegung unseres Doppelpendels in ihren Hauptmomenten skizziren.

Das Secundärsystem wird je nach der durch die Momentankräfte, die Massen- und die Längenverhältnisse bedingten individuellen Natur der Constanten c' und h' entweder vollständige Umschwingungen um die Secundäraxe O_2 oder aber pendelartige Oscillationen vollführen können, deren relative Gleichgewichtslage durch die Verticalebene $O_1\,O_2$ gekennzeichnet ist.

Haben wir es mit einer vollständigen Umschwingung des Secundärsystems zu thun, so wird die relative Winkelgeschwindigkeit von $\omega = \pi$ bis $\omega = 2\pi$ successive dieselben Werthe annehmen wie von $\omega = 0$ bis $\omega = \pi$, nur in umgekehrter Reihenfolge. Schwingt die Masse M_2 pendelartig hin und her, so wird ihre relative Winkelgeschwindigkeit von $\omega = \pi$ bis $\omega = 2\pi - \sigma$ in derselben Weise abnehmen wie sie von $\omega = \sigma$ bis $\omega = \pi$ zunimmt.

Der Specialfall $D = +1$ vermittelt den Uebergang von vollständigen Umschwingungen zu einer blos pendelnden Bewegung. Das Secundärsystem wird sich mit zunehmender relativer Geschwindigkeit bis $\omega = \pi$ bewegen. Alsdann wird seine relative Winkelgeschwindigkeit abnehmen bis sie in der Lage $\omega = 2\pi$ auf den Werth Null gesunken ist. Doch wird, wie wir später sehen werden, diese Ruhestation erst nach Verlauf einer unendlich grossen Zeit erreicht werden.

In dem anderen Grenzfalle $D = -1$ bewegen sich beide Massen von Anfang an so als ob sie zu einem einzigen starren System mit einander vereinigt wären. Die Bewegung wird also eine vollkommen gleichförmige sein. —

Aus den im vorigen Paragraphen in Bezug auf ψ'_2 und ψ'_3 entwickelten Verhältnissen schliesst man, dass die Bewegung des primären Systems eine stetige oder unstetige sein kann, gleichgültig ob die secundäre Masse vollständige oder blos pendelnde Oscillationen macht.

Ist die Bewegung eine stetige, so wird das primäre System, stets in demselben Sinne rotirend, seine kleinste Geschwindigkeit besitzen, wenn der Schwerpunkt des Secundärsystems seinen grössten Abstand von der festen Axe erreicht hat, und seine grösste Geschwindigkeit, sobald der Schwerpunkt von M_2 seinen kleinsten Abstand von der festen Axe einnimmt.

Ist die Bewegung des primären Systems eine unstetige, so wird das Azimuth ψ innerhalb der Periode im Allgemeinen ein Maximum und ein Minimum besitzen. Ist das Maximum von ψ erreicht und M_1 einen Augenblick zur Ruhe gelangt, so wird unmittelbar hierauf die Bewegung in eine rückläufige umschlagen, welche so lange anhält bis die Geschwindigkeit wiederum auf Null gesunken ist d. h. das Azimuth sein Minimum erworben hat.

Alsdann wird die Bewegung wieder in ursprünglichem Sinne erfolgen und abwechselnd als eine vor- und rückschnellende, periodisch gleichsam von zwei Zuckungen unterbrochene erscheinen.

In dem Grenzfalle, wo die Minimalgeschwindigkeit von ψ' den Werth Null hat, während die Maximalgeschwindigkeit positiv ist, oder wo das Maximum von ψ' Null und das Minimum negativ ist, fällt das Minimum des Azimuths mit seinem Maximum zusammen. Es wird mithin auch hier eine zuckende Bewegung auftreten, welche sich indess von der vorher beschriebenen dadurch unterscheidet, dass sie hier nicht bald als eine vorwärts, bald als eine rückwärts springende, sondern vielmehr als eine stets in ursprünglichem Richtungssinne weiterschreitende Bewegung sich darstellt, welche periodisch nur einmal zur Ruhe gelangt.

Ist das Maximum der Winkelgeschwindigkeit des primären Systems positiv und das Minimum Null, so wird von der Masse M_1 die Ruhestation erreicht werden, wenn der Schwerpunkt der secundären Masse seinen grössten Abstand von der festen Axe besitzt.

Ist das Maximum von ψ' Null und das Minimum negativ, so wird das primäre System zur Ruhe kommen, sobald der Schwerpunkt der Masse M_2 sich in seiner Minimaldistanz von der festen Are befindet.

In den übrigen Fällen wird die ruckweise Aenderung der Bewegung des primären Systems eintreten, sobald $\omega = \pm\beta$ geworden ist, wo β aus der Gleichung resultirt:

$$\cos\beta = \frac{s^2 + \varrho_2^2}{rs} - \frac{|c'|}{rs}\sqrt{\frac{s^2 + \varrho_2^2}{h'}}$$

Handelt es sich um eine pendelnde Bewegung des Secundärsystems, so werden sich am primären System dieselben Erscheinungen zeigen können. Nur wird hier, da ω den Werth 2π nicht erreicht, das Maximum resp. Minimum von ψ' für $\omega = \pi$ erworben werden, je nachdem der Schwerpunkt der Masse M_2 diese Lage in positivem oder negativem Richtungssinne passirt.

§ IV.

Wir kehren nunmehr zu den im § I unter 11. und 13. gegebenen Relationen zurück. Es hatte sich ergeben:

$$dt = \pm\sqrt{\frac{rs}{2h'}}\sqrt{\frac{B - \cos^2\omega}{D - \cos\omega}}\,d\omega.$$

Die Integration liefert unmittelbar:

$$1. \quad t = \sqrt{\frac{rs}{2h'}}\int_{\omega_0}^{\omega}\sqrt{\frac{B - \cos^2\omega}{D - \cos\omega}}\,d\omega,$$

wenn wir mit ω_0 die Anfangslage des Secundärsystems bezeichnen.

Der Formel 13. geben wir die Gestalt:

$$\frac{d\psi}{d\omega} = \frac{\pm\sqrt{C}}{A - \cos\omega}\sqrt{\frac{B - \cos^2\omega}{D - \cos\omega}} + \frac{A - \frac{rs}{r^2 + \varepsilon\varrho_1^2}\cdot B}{2(A - \cos\omega)} - \frac{1}{2}.$$

Und hieraus fliesst durch Integration:

$$2. \quad \psi = \psi_0 + \frac{\omega_0}{2} + p\cdot\left[\operatorname{arctg}\left\{\sqrt{\frac{A+1}{A-1}}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\right\}\right]_{\omega_0}^{\omega} - \frac{\omega}{2} \pm \sqrt{C}\int_{\omega_0}^{\omega}\frac{d\omega}{A - \cos\omega}\sqrt{\frac{B - \cos^2\omega}{D - \cos\omega}},$$

worin ω_0 und ψ_0 die den Anfangslagen entsprechenden Winkelwerthe bedeuten und gesetzt ist:

$$p = \frac{A - \frac{rs}{r^2 + s\varrho_1^2} B}{\sqrt{A^2 - 1}}$$

Durch die beiden Relationen 1. und 2. ist unser Problem in seiner ganzen Allgemeinheit gelöst. Was die in jenen Formeln auftretenden Integrale betrifft, so gehören dieselben zu den hyperelliptischen oder Abel'schen vom Geschlechte 2.

Wir wollen die Integrale nunmehr für sich betrachten und zu diesem Zwecke der Kürze halber der folgenden Bezeichnungen uns bedienen:

$$J_1 = \int_{\omega_0}^{\omega} \sqrt{\frac{B - \cos^2\omega}{D - \cos\omega}}\, d\omega \qquad J_2 = \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{A - \cos\omega} \sqrt{\frac{B - \cos^2\omega}{D - \cos\omega}}.$$

Setzen wir $z = \cos\omega$, so wird:

$$3. \quad \ldots\ldots \quad J_1 = -\int_{z_0}^{z} \frac{(B - z^2)\, dz}{\sqrt{(1 - z^2)(D - z)(B - z^2)}}$$

$$4. \quad \ldots\ldots \quad J_2 = -\int_{z_0}^{z} \frac{(B - z^2)\, dz}{(A - z)\sqrt{(1 - z^2)(D - z)(B - z^2)}}.$$

Zunächst mögen diese Integrale in die von Rosenhain und Prym aufgestellte canonische Form transformirt werden.

I. Für den Fall: $1 < D < +\infty$ wählen wir die Substitution:

$$5. \quad \ldots\ldots \quad x = \frac{D - z}{\sqrt{B} - z} \cdot \frac{\sqrt{B} - 1}{D - 1}.$$

Alsdann ist für $z = \sqrt{B}$, $x = \infty$

„ $z = D$, $x = 0$

„ $z = 1$, $x = 1$

und es möge sein für $z = -1$, $x = \frac{1}{\varkappa^2} = \frac{D + 1}{\sqrt{B} + 1} \cdot \frac{\sqrt{B} - 1}{D - 1}$

„ $z = -\sqrt{B}$, $x = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{\sqrt{B} + D}{2\sqrt{B}} \cdot \frac{\sqrt{B} - 1}{D - 1}$

„ $z = \infty$, $x = \frac{1}{\mu^2} = \frac{\sqrt{B} - 1}{D - 1}$.

Man erkennt, dass, so lange $1 < D < +\infty$, zwischen den Moduln die folgende Beziehung besteht:

$$0 < \mu^2 < \lambda^2 < \varkappa^2 < 1.$$

Die Integrale selbst nehmen die Form an:

$$6. \quad \ldots \quad J_1 = b \cdot \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{(1 - \lambda^2 x)\, dx}{(1 - \mu^2 x)\sqrt{X}}; \qquad 7. \quad \ldots \quad J_2 = b' \cdot \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{(1 - \lambda^2 x)\, dx}{(a - x)\sqrt{X}},$$

worin gesetzt ist:

$$b = -i(\sqrt{B} - D) \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{B}+D}{(\sqrt{B}-1)(D+1)}} \qquad b' = \frac{b}{\mu^2 (A - \sqrt{B})}$$

$$a = \frac{A - D}{\mu^2 (A - \sqrt{B})} \qquad \sqrt{X} = \sqrt{x \,.\, 1 - x \,.\, 1 - \varkappa^2 x \,.\, 1 - \lambda^2 x \,.\, 1 - \mu^2 x}.$$

Aus der Gestalt der Integrale ist unmittelbar ersichtlich, dass J_1 für $x = \frac{1}{\mu^2}$ algebraisch unendlich, J_2 aber für $x = a$ logarithmisch unendlich wird. J_1 ist daher ein hyperelliptisches Integral 2ter Gattung, J_2 aber ein hyperelliptisches Integral 3ter Gattung.

Ia. In dem einen Falle, wo $D = \sqrt{B}$ ist, wird die hier angewendete Substitution unbrauchbar.

Die Integrale nehmen indess schon sofort folgende einfachere Gestalten an:

$$J_1 = \int_{\omega_0}^{\omega} \sqrt{\sqrt{B} + \cos\omega}\, d\omega \qquad J_2 = \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{A - \cos\omega} \sqrt{\sqrt{B} + \cos\omega}.$$

Wird hierin $\omega = 2\varphi$ gesetzt, so erhält man für:

$$8. \quad J_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\varkappa} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}\; d\varphi,$$

worin der Modul $\varkappa^2$ den Werth besitzt:

$$\varkappa^2 = \frac{2}{\sqrt{B} + 1}$$

J_2 aber erscheint unter der Form:

$$9. \quad J_2 = \frac{n\sqrt{2}}{\varkappa} \left\{ \left(1 + \frac{\varkappa^2}{n}\right) \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}} - \frac{\varkappa^2}{n} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}} \right\},$$

worin $n = \frac{2}{A - 1}$ gesetzt ist.

J_1 hat also den Charakter eines elliptischen Integrals II. Gattung, J_2 den eines elliptischen Integrals III. Gattung.

II. Liegt D in dem Intervall: $-1 < D < +1$, so bedienen wir uns der folgenden Substitution:

$$10. \quad x = \frac{1 - z}{\sqrt{B} - z} \cdot \frac{\sqrt{B} - D}{1 - D}.$$

Sodann ist für $z = \sqrt{B}$, $x = \infty$
„ $z = 1$, $x = 0$
„ $z = D$, $x = 1$

und es sei für $z = -1$, $x = \frac{1}{\varkappa^2} = \frac{2}{\sqrt{B} + 1} \cdot \frac{\sqrt{B} - D}{1 - D}$

„ $z = -\sqrt{B}$, $x = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{\sqrt{B} + 1}{2\sqrt{B}} \cdot \frac{\sqrt{B} - D}{1 - D}$

„ $z = \infty$, $x = \frac{1}{\mu^2} = \frac{\sqrt{B} - D}{1 - D}$.

Auch hier ist unter der Bedingung, dass: $-1 < D < +1$ die Beziehung: $0 < \mu^2 < \lambda^2 < \varkappa^2 < 1$ erfüllt.

Für die beiden Integrale selbst erhalten wir folgende Ausdrücke:

$$11. \quad J_1 = b \cdot \int_{x_0}^{x} \frac{(1-\lambda^2 x)\,dx}{(1-\mu^2 x)\sqrt{X}}; \qquad 12. \quad J_2 = b' \cdot \int_{x_0}^{x} \frac{(1-\lambda^2 x)\,dx}{(a-x)\sqrt{X}}.$$

worin gesetzt ist:

$$b = -i(B-1)\sqrt{\frac{\sqrt{B}+1}{2(\sqrt{B}+1)(\sqrt{B}-D)}} \qquad b' = \frac{b}{\mu^2(A-\sqrt{B})} \qquad a = \frac{A-1}{\mu^2(A-\sqrt{B})}.$$

IIa. Besitzt D den Werth 1, so verliert die unter II benutzte Substitution ihre Gültigkeit. Wir gehen daher von der ursprünglichen Form der Integrale aus:

$$13. \quad J_1 = -\int_{z_0}^{z} \frac{(B-z^2)\,dz}{(1-z)\sqrt{(1+z)(B-z^2)}}; \qquad 14. \quad J_2 = -\int_{z_0}^{z} \frac{(B-z^2)\,dz}{(A-z)\sqrt{(1+z)(B-z^2)}}.$$

Behufs Transformation dieser Integrale auf die Normalform führen wir statt z eine Hülfsvariabele φ ein, so dass:

$$15. \quad \sin^2\varphi = \frac{2\sqrt{B}}{\sqrt{B}+1} \cdot \frac{1+z}{\sqrt{B}+z} = \frac{1}{\varkappa^2} \cdot \frac{1+z}{\sqrt{B}+z},$$

wenn wir setzen: $\varkappa^2 = \dfrac{\sqrt{B}+1}{2\sqrt{B}}$.

Aus Gleichung 13. wird hiernach:

$$16. \quad J_1 = -\frac{B-1}{\sqrt{2\sqrt{B}}}\left\{\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\varDelta\varphi\,d\varphi}{1+n_1\sin^2\varphi} + \frac{1}{\sqrt{B}}\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\varDelta^3\varphi}\right\},$$

wenn gesetzt wird:

$$17. \quad n_1 = -\frac{\sqrt{B}+1}{2}\varkappa^2 \text{ und } \varDelta^2\varphi = 1 - \varkappa^2\sin^2\varphi.$$

Für J_2 erhalten wir aber mit Rücksicht auf die leicht zu verificirende Identität:

$$\frac{B-z^2}{(A-z)(1-z)} = \frac{1}{A-1}\left\{\frac{A^2-B}{A-z} + \frac{B-1}{1-z}\right\} - 1$$

den folgenden Ausdruck:

$$18. \quad J_2 = \frac{2}{\sqrt{2\sqrt{B}}}\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} - \frac{1}{(A-1)\sqrt{2\sqrt{B}}}\left\{\frac{2(A^2-B)}{A+1}\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\varDelta\varphi\,d\varphi}{1+n_2\sin^2\varphi} + (B-1)\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\varDelta\varphi\,d\varphi}{1+n_1\sin^2\varphi}\right\},$$

worin gesetzt ist:

$$19. \quad n_2 = -\frac{A+\sqrt{B}}{A+1}\varkappa^2.$$

φ_0 bedeutet in diesen Relationen den der Anfangslage z_0 entsprechenden Werth von φ.

Beachtet man nun, dass allgemein:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\varDelta\varphi\,d\varphi}{1+n\sin^2\varphi} = \frac{n+\varkappa^2}{n}\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\varDelta\varphi} - \frac{\varkappa^2}{n}\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}$$

und:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta^3\varphi} = \frac{1}{\varkappa'^2}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{\varkappa^2}\left[\int_{\varphi_0}^{\varphi}\Delta\varphi\, d\varphi - \varkappa'^2\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}\right] - \\ -\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{\sin\varphi_0\cos\varphi_0}{\Delta\varphi_0}\end{array}\right\},$$

so resultirt schliesslich für J_1:

$$20. \quad J_1 = -\frac{B-1}{\sqrt{2\sqrt{B}}}\left\{\begin{array}{l}\frac{\sqrt{B}-1}{\sqrt{B}+1}\cdot\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1+n_1\sin^2\varphi)\Delta\varphi} + \frac{4\sqrt{B}}{B-1}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\Delta\varphi\, d\varphi + \\ + \frac{2}{\sqrt{B}-1}\cdot\left[\frac{\sin\varphi_0\cos\varphi_0}{\Delta\varphi_0} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi}\right]\end{array}\right\}$$

und für J_2:

$$21. \quad J_2 = -\frac{\sqrt{B}-1}{(A-1)\sqrt{2\sqrt{B}}}\cdot\left\{\begin{array}{l}\frac{2(A-\sqrt{B})}{A+1}\cdot\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1+n_2\sin^2\varphi)\Delta\varphi} + \\ +(\sqrt{B}-1)\cdot\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1+n_1\sin^2\varphi)\Delta\varphi}\end{array}\right\}.$$

Es führt also auch dieser Specialfall auf elliptische Transcendente. —

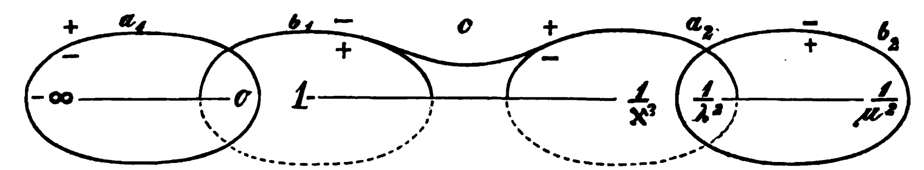
Was übrigens die untere Grenze x_0 der unter I und II besprochenen hyperelliptischen Integrale betrifft, so möge $x_0 = 1$ gewählt werden, d. h. im Falle vollständiger Umläufe $\omega_0 = 0$ und im Falle einer blos pendelnden Bewegung $\omega_0 = \sigma$.

Aus den Relationen 6. 7. 11. 12. erkennt man, dass unser Integral J_2 im allgemeinen Falle zu der Klasse von Integralen gehört, welche bereits von Brill in der Abhandlung (Crelle Bd. 65): „Ueber diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als hyperelliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen", untersucht worden sind. Direct können wir freilich die dort gewonnenen Resultate nicht verwerthen, da Brill als untere Grenze der Integrale den Werth Null annimmt und überdies in jenen Entwickelungen sich einige Versehen eingeschlichen haben, welche zum Theil die Richtigkeit des endgültigen in Formel 5. zusammengefassten Ergebnisses alteriren. Wir wollen daher auf einem anderen Wege die Darstellung der Abel'schen Integrale bewirken, indem wir gleichzeitig von einer Notiz Gebrauch machen, welche Brill in der citirten Abhandlung gelegentlich giebt. Auch dürften hier einige knappe Bemerkungen hinsichtlich der algebraischen Darstellung von Thetaquotienten nicht unerwünscht sein, zumal im Laufe unserer Entwickelungen gewisse Thetarelationen vielfach Anwendung finden werden.

§ V.

Die dieser Abhandlung beigefügte Tafel II enthält gewisse Formeln, deren Berechnung sowohl mittelst rein algebraischer Methoden als auch mit Hülfe Riemann'scher Principien gelingt. In der Preisschrift: „Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes", zeigt Rosenhain, wie man die gewissen Thetaquotienten entsprechenden algebraischen Ausdrücke durch reine Rechnung finden kann, während solche Relationen andererseits mittelst Riemann'scher Theorien von Prym in seiner Dissertation: „Nova theoria functionum ultraellipticarum" entwickelt

worden sind. Wenn wir uns für die letztere Methode entscheiden, legen wir zweckmässig unseren Betrachtungen eine zweiblättrige Riemann'sche Fläche T zu Grunde, deren Verzweigungsart in nachstehender Figur skizzirt ist.



Die beiden linearunabhängigen Integrale I. Gattung seien:

$$u = \int_1^x \frac{(B_1 + C_1 x)\, dx}{\sqrt{X}} \quad \text{und} \quad u' = \int_1^x \frac{(B_1' + C_1' x)\, dx}{\sqrt{X}}.$$

B_1, C_1, B_1', C_1' bedeuten gewisse Constante, welche so bestimmt sind, dass die Integrale u und u' die folgenden Periodicitätsmoduln besitzen:

u	u'	am Querschnitt:
$i\pi$	0	a_1
a_{11}	a_{21}	b_1
a_{12}	a_{22}	a_2
0	$i\pi$	b_2

wobei wegen der Convergenz der Thetareihe die Grössen a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} alle als reell vorausgesetzt sind und ausserdem: $a_{12} = a_{21}$, $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$, $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} < 0$.

Hieraus folgt, dass:

$$\int_1^0 du = -\frac{i\pi}{2}, \quad \int_1^{\frac{1}{\varkappa^2}} du = -\frac{a_{11}}{2} - \frac{a_{12}}{2}, \quad \int_1^{\frac{1}{\lambda^2}} du = -\frac{a_{11}}{2} - \frac{a_{12}}{2}, \quad \int_1^{\frac{1}{\mu^2}} du = -\frac{a_{11}}{2}, \quad \int_1^{-\infty} du = -\frac{i\pi}{2} - \frac{a_{11}}{2}$$

$$\int_1^0 du' = 0, \quad \int_1^{\frac{1}{\varkappa^2}} du' = -\frac{a_{12}}{2} - \frac{a_{22}}{2}, \quad \int_1^{\frac{1}{\lambda^2}} du' = \frac{i\pi}{2} - \frac{a_{12}}{2} - \frac{a_{22}}{2}, \quad \int_1^{\frac{1}{\mu^2}} du' = \frac{i\pi}{2} - \frac{a_{12}}{2}, \quad \int_1^{-\infty} du' = -\frac{a_{12}}{2}.$$

Der Werth des von 1 bis $\frac{1}{\varkappa^2}$ hinerstreckten Integrals ist dadurch ermittelt, dass man über eine in sich zurückkehrende Curve integrirt, die vollständig im oberen Blatte verläuft und sämmtliche Verzweigungspunkte umschliesst. Das über diese Curve hinerstreckte Integral ist dann gleich Null zu setzen. Für die Constanten B_1, C_1, B_1', C_1' giebt Rosenhain in seiner Preisschrift p. 433 folgende Ausdrücke:

$$1. \quad \left\{ \begin{aligned} 2B_1 &= -\frac{\frac{\partial \vartheta_{01}^{01}}{\partial u'}}{\vartheta_{00}^{00} \cdot \vartheta_{00}^{01} \cdot \vartheta_{01}^{00}}; & 2B_1' &= \frac{\frac{\partial \vartheta_{01}^{01}}{\partial u}}{\vartheta_{00}^{00} \cdot \vartheta_{00}^{01} \cdot \vartheta_{01}^{00}} \\ 2C_1 &= -\frac{\vartheta_{01}^{10} \cdot \vartheta_{00}^{11} \cdot \vartheta_{00}^{10}}{\vartheta_{00}^{00} \cdot \vartheta_{00}^{01} \cdot \vartheta_{01}^{00}} \cdot \frac{\frac{\partial \vartheta_{01}^{11}}{\partial u'}}{\vartheta_{00}^{00} \cdot \vartheta_{00}^{01} \cdot \vartheta_{01}^{00}}; & 2C_1' &= \frac{\vartheta_{01}^{10} \cdot \vartheta_{00}^{11} \cdot \vartheta_{00}^{10}}{\vartheta_{00}^{00} \cdot \vartheta_{00}^{01} \cdot \vartheta_{01}^{00}} \cdot \frac{\frac{\partial \vartheta_{01}^{11}}{\partial u}}{\vartheta_{00}^{00} \cdot \vartheta_{00}^{01} \cdot \vartheta_{01}^{00}} \end{aligned} \right.$$

worin gesetzt ist:

$$\vartheta = \vartheta(0,0) \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial u} = \left[\frac{\partial \vartheta(u,u')}{\partial u}\right]_{u=u'=0} \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial u'} = \left[\frac{\partial \vartheta(u,u')}{\partial u}\right]_{u=u'=0}.$$

Die Bedeutung der hier vorkommenden Thetas ist aus der Tafel I ersichtlich. Die Argumente u und u' sind zwei linearunabhängige Integrale erster Gattung.

In der Folge werden wir stets auf die in der Tafel I kurz zusammengestellten Eigenschaften der Thetafunction Bezug nehmen. Als besonders wichtig möge hier nur hervorgehoben werden, dass sich nach Riemann die unteren Grenzen der als Argumente auftretenden Integrale erster Gattung stets so bestimmen lassen, dass jede der 16 Thetafunctionen identisch verschwindet.

Unter der Annahme, dass die unteren Grenzen der Integrale u, u' gleich sind, hat man:

$$\vartheta(u - e, u' - e') = 0^1 \text{ für } \begin{cases} x, \sqrt{X} = x_1, \sqrt{X_1} \\ x, \sqrt{X} = x_2, \sqrt{X_2} \end{cases}$$

wenn die Constanten e, e' folgenden Congruenzen genügen:

$$e \mid e' \equiv \int_\varepsilon^{x_1} du + \int_\varepsilon^{x_2} du + k_1 \mid \int_\varepsilon^{x_1} du' + \int_\varepsilon^{x_2} du' + k_2.$$

k_1 und k_2 sind Constante, welche bis auf Vielfache der Periodicitätsmoduln bestimmt sind durch:

$$k_1, k_2 \equiv -\int_\varepsilon^{c_1^{(0)}} du - \int_\varepsilon^{c_2^{(0)}} du \mid -\int_\varepsilon^{c_1^{(0)}} du' - \int_\varepsilon^{c_2^{(0)}} du',$$

worin durch $c_1^{(0)}$, $c_2^{(0)}$ die Nullpunkte der Function $\vartheta(\int_\varepsilon^x du, \int_\varepsilon^x du')$ repräsentirt werden mögen. (Man vergleiche hierzu Weber: „Abel'sche Functionen", p. 74.)

In unserem Falle ist $\varepsilon = 1$, und da:

$$\vartheta(\int_1^x du, \int_1^x du') = 0^1 \text{ für } \begin{cases} x = \frac{1}{\lambda^2} \\ x = -\infty \end{cases}$$

so ist:

$$k_1 \mid k_2 \equiv \frac{i\pi}{2} - \frac{a_{12}}{2} \mid \frac{i\pi}{2} - \frac{a_{22}}{2}$$

und demnach:

$$\vartheta\left(\int_1^x du - \int_1^{x_1} du - \int_1^{x_2} du + \frac{i\pi}{2} - \frac{a_{12}}{2}, \int_1^x du' - \int_1^{x_1} du' - \int_1^{x_2} du' + \frac{i\pi}{2} - \frac{a_{22}}{2}\right) = 0^1$$

$$\text{für } \begin{cases} x, \sqrt{X} = x_1, \sqrt{X_1} \\ x, \sqrt{X} = x_2, \sqrt{X_2} \end{cases}$$

d. h. es ist identisch:

$$2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad \vartheta_{11}^{01}(\int_1^x du, \int_1^x du') = 0^1 \text{ für jedes } x.$$

Die Berechnung der in den Tafeln II und III gegebenen Formeln lässt sich nun mit Hülfe des Prym'schen Verfahrens auf folgende sehr einfache Weise bewirken.

Betrachten wir den übrigens beliebigen Thetaquotienten

$$3. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad r_1^2 = \frac{\vartheta^2 {\varepsilon_1 \varepsilon_2 \atop \varepsilon'_1 \varepsilon'_2}(u, u')}{\vartheta^2 {\eta_1 \eta_2 \atop \eta'_1 \eta'_2}(u, u')},$$

worin u, u' die beiden schon erwähnten Integrale erster Gattung bedeuten, so zeigt sich, dass derselbe auf der ganzen Riemann'schen Fläche T' überall, selbst beim Ueberschreiten der Querschnitte, eindeutig und stetig bleibt, dass er sich somit als eine wie die Fläche T' verzweigte Function durch einen aus x und $\sqrt{X}$ rational zusammengesetzten Ausdruck darstellen lassen muss.

Bei der Bildung eines solchen algebraischen Ausdrucks hat man vor Allem darauf Bedacht zu nehmen, dass derselbe in denselben Punkten und daselbst auch von derselben Ordnung Null resp. unendlich wird wie der gerade in Rede stehende Thetaquotient.

Jede wie die Fläche T' verzweigte algebraische Function wird aber in der allgemeinen Form:

$$4. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad R_1^2 = \frac{f\overset{m}{\overline{(x)}} + \varphi\overset{n}{\overline{(x)}} \,.\, \sqrt{X}}{F\overset{p}{\overline{(x)}}}$$

enthalten sein, wenn mit $f\overset{m}{\overline{(x)}}$, $\varphi\overset{n}{\overline{(x)}}$, $F\overset{p}{\overline{(x)}}$ rationale ganze Functionen von x bezeichnet werden, welche beziehlich vom $m$ten, $n$ten oder $p$ten Grade sind.

In 3. wollen wir nun zum Nenner die Function $\vartheta^2{}^{11}_{01}(u, u')$ wählen, so dass r_1^2 nunmehr für $x = 1$ und $x = -\infty$ unendlich von der zweiten Ordnung wird. Wählen wir in 4. $F\overset{p}{\overline{(x)}} = 1 - x$, so wird der Nenner von R_1^2 ebenso wie der Nenner von r_1^2 in den Punkten $x = 1$ und $x = -\infty$ Null von der 2ten Ordnung.

Damit also R_1^2 selbst für $x = -\infty$ unendlich von der zweiten Ordnung werde, muss der Zähler im Allgemeinen so gebaut sein, dass er für $x = -\infty$ höchstens von der vierten Ordnung unendlich werden kann. Nun aber wird die Function $\sqrt{X}$ allein schon im Punkte $x = -\infty$ von der fünften Ordnung unendlich und demgemäss muss $\varphi\overset{n}{\overline{(x)}} = 0$ und $f\overset{m}{\overline{(x)}}$ eine aus x rational zusammengesetzte algebraische Function vom zweiten Grade sein.

Bestimmt man jetzt die in $f\overset{2}{\overline{(x)}}$ auftretenden Constanten so, dass R_1^2 in denselben Punkten und daselbst auch von derselben Ordnung Null wird wie r_1^2, so kann man setzen:

$$r_1^2 = c \,.\, R_1^2,$$

wo c eine Constante bedeutet.

Wählen wir beispielsweise die specielle Function:

$$r_1^2 = \frac{\vartheta^2{}^{00}_{11}(u)}{\vartheta^2{}^{11}_{01}(u)},$$

worin das zweite Argument weggelassen ist, so wird dieser Quotient, da $\overset{2}{\vartheta}{}^{00}_{11}(u) = 0^2$ für $\begin{cases} x = \frac{1}{\lambda^2} \\ x = \frac{1}{\mu^2} \end{cases}$

und $\overset{2}{\vartheta}{}^{11}_{01}(u) = 0^2$ für $\begin{cases} x = -\infty \\ x = 1 \end{cases}$

in den Punkten $x = \frac{1}{\mu^2}, \frac{1}{\lambda^2}$ Null von der zweiten Ordnung und in den Punkten $x = 1, -\infty$ unendlich von der zweiten Ordnung.

Ohne Schwierigkeit lässt sich aber eine aus x zusammengesetzte Function bilden, welche dieselben Eigenschaften besitzt, nämlich:

$$R_1^2 = \frac{(1 - \lambda^2 x)(1 - \mu^2 x)}{1 - x};$$

man hat demnach:

$$\frac{\overset{2}{\vartheta}{}^{00}_{11}(u)}{\overset{2}{\vartheta}{}^{11}_{01}(u)} = c \cdot \frac{(1 - \lambda^2 x)(1 - \mu^2 x)}{1 - x}.$$

Um die Constante c zu bestimmen, setzen wir hierin:

$$x = \frac{1}{\varkappa^2}, \text{ dann wird: } \frac{\overset{2}{\vartheta}{}^{11}_{11}}{\overset{2}{\vartheta}{}^{00}_{01}} = c\, \frac{\lambda_\varkappa^2 \cdot \mu_\varkappa^2}{\varkappa^2 \cdot \varkappa_1^2},$$

und ferner:

$$x = 0, \quad " \quad " \quad \frac{\overset{2}{\vartheta}{}^{00}_{01}}{\overset{2}{\vartheta}{}^{11}_{11}} = c.$$

Aus beiden Gleichungen ergiebt sich für c der Werth:

$$c = \frac{\varkappa \varkappa_1}{\lambda_\varkappa \cdot \mu_\varkappa},$$

wenn gesetzt wird:

$$\varkappa_1^2 = 1 - \varkappa^2 \qquad \lambda_\varkappa^2 = \varkappa^2 - \lambda^2 \qquad \mu_\varkappa^2 = \varkappa^2 - \mu^2,$$

und somit hat man schliesslich:

$$\frac{\overset{2}{\vartheta}{}^{00}_{11}(u)}{\overset{2}{\vartheta}{}^{11}_{01}(u)} = \frac{\varkappa \varkappa_1}{\lambda_\varkappa \cdot \mu_\varkappa} \cdot \frac{(1 - \lambda^2 x)(1 - \mu^2 x)}{1 - x}.$$

In ganz analoger Weise sind aus den Null- und Unendlichkeitspunkten der verschiedenen Thetaquotienten die übrigen in der Tafel II gegebenen Relationen gewonnen worden.

Bei der Aufstellung der Formeln, welche die Tafel III enthält, sind zwei verschiedene Wege eingeschlagen. Diejenigen Formeln, in denen die Thetafunction des Zählers ungerade ist, lassen sich auf dem vorhin angedeuteten Wege ebenfalls finden. Bei denjenigen Formeln indess, in denen als Zähler eine gerade Thetafunction auftritt, gestaltet sich der Entwickelungsgang folgendermassen.

In dem Ausdruck:

$$5. \quad \ldots\ldots \quad r_2^2 = \frac{\overset{2}{\vartheta}{}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2}_{\varepsilon_1' \varepsilon_2'}(u_1 + u_2)}{\overset{2}{\vartheta}{}^{11}_{01}(u_1 + u_2)},$$

in welchem $$\varepsilon_1 \varepsilon_1' + \varepsilon_2 \varepsilon_2' \equiv 0 \text{ mod. } 2$$
und
$$u_1 + u_2 = \int_1^{x_1} du + \int_1^{x_2} du \qquad u_1' + u_2' = \int_1^{x_1} du' + \int_1^{x_2} du'$$
wird der Nenner als Function von x_1 für die beiden Punkte $x_1, \sqrt{X_1} = x_2, -\sqrt{X_2}$ und $x_1, \sqrt{X_1} = -\infty$ Null von der zweiten Ordnung; ausserdem verschwindet der Zähler als Function von x_1 in zwei von der Wahl der Thetacharakteristik abhängigen Punkten. Analoges findet für r_2^2 statt, wenn man diesen Ausdruck als Function von x_2 betrachtet; es werden hierbei x_1 und x_2 nur ihre Rollen vertauschen.

Die zu bildende algebraische Function wird mithin in Bezug auf x_1 und x_2, $\sqrt{X_1}$ und $\sqrt{X_2}$ völlig symmetrisch sein müssen.

Betrachten wir zunächst wiederum r_2^2 als Function von $x_1, \sqrt{X_1}$, so muss der aufzustellende algebraische Ausdruck vor Allem unendlich von der zweiten Ordnung für $x_1, \sqrt{X_1} = x_2, -\sqrt{X_2}$ und für $x_1, \sqrt{X_1} = -\infty$ werden.

Als eine mit der Fläche T' gleichverzweigte Function wird r_2^2 in der allgemeinen Form enthalten sein:
$$R_2^2 = \frac{\overset{m}{\overline{f(x_1)}} + \overset{n}{\overline{\varphi(x_1)}} \cdot \sqrt{X_1}}{(x_1 - x_2)^2}.$$
Der Nenner $(x_1 - x_2)^2$ wird nun für $x_1 = -\infty$ von der 4ten Ordnung Null.

Was den Zähler anlangt, so ist für $x_1 = -\infty$, $\sqrt{X_1} : \infty^5$
$$\overset{n}{\overline{\varphi(x_1)}} : \infty^{2n}$$
$$\overset{m}{\overline{f(x_1)}} : \infty^{2m}.$$
Hieraus folgt, dass, wenn R_2^2 für $x_1 = -\infty$ von der zweiten Ordnung unendlich werden soll, $m = 3$ und $n = 0$ zu wählen ist. Infolgedessen können wir setzen:
$$6. \quad \ldots \ldots \quad R_2^2 = \frac{c_1 \sqrt{X_1} + c_2 x_1^3 + c_3 x_1^2 + c_4 x_1 + c_5}{(x_1 - x_2)^2},$$
worin die mit c bezeichneten Grössen Functionen von x_2 und $\sqrt{X_2}$ sind.

I. Der in 6. für R_2^2 gegebene Ausdruck muss nun in Bezug auf x_1, x_2, $\sqrt{X_1}$, $\sqrt{X_2}$ symmetrisch sein; wir haben also dadurch die speciellere Form:
$$7. \quad \ldots \quad R_2^2 = \frac{\gamma_1 \sqrt{X_1} \cdot \sqrt{X_2} + \gamma_2 [\overset{3}{\overline{f(x_2)}} \cdot \sqrt{X_1} + \overset{3}{\overline{f(x_1)}} \cdot \sqrt{X_2}] + \gamma_3 \cdot \overset{3}{\overline{f(x_1, x_2)}}}{(x_1 - x_2)^2},$$
worin die γ gewisse Constante und $\overset{3}{\overline{f(x_1, x_2)}}$ eine in Bezug auf x_1 und x_2 symmetrische Function 3ten Grades bedeutet.

II. Setzt man für x_2 einen Verzweigungspunkt, so nimmt unser Thetaquotient Formen an, die bereits in Tafel I dargestellt sind und die der allgemeine Ausdruck:
$$r_1^2 = \frac{p x^2 + p_1 x + p_2}{q x^2 + q_1 x + q_2}$$
sämmtlich implicirt, falls die Constanten p, p_1, p_2, q, q_1, q_2 auch Null sein können.

Setzt man in R_2^2 für x_2 einen der Verzweigungspunkte: 0, 1, $\frac{1}{\varkappa^2}$, $\frac{1}{\lambda^2}$, $\frac{1}{\mu^2}$, so muss die dadurch entstehende Form identisch mit r_1^2 und somit unabhängig von $\sqrt{X_1}$ werden. Die Function $\overset{3}{\overline{f(x_2)}}$ kann aber nicht für mehr als für 3 Wurzeln verschwinden; wir haben demnach für $\gamma_2 = 0$ und für R_2^2 die Gestalt:

$$8. \quad \ldots \ldots \quad R_2^2 = C \cdot \frac{2\sqrt{X_1} \cdot \sqrt{X_2} + \overset{3}{\overline{f(x_1, x_2)}}}{(x_1 - x_2)^2}.$$

III. Der Nenner des in 8. gewonnenen Ausdrucks ist unabhängig von $\sqrt{X_1}$ und $\sqrt{X_2}$ und wird demzufolge, als Function von x_1, $\sqrt{X_1}$ betrachtet, für die beiden bei x_2 im oberen und unteren Blatte liegenden Punkte: $x_1, \sqrt{X_1} = x_2, \pm\sqrt{X_2}$ verschwinden. Unser Thetaquotient ist aber im Punkte $x_1, +\sqrt{X_1} = x_2, +\sqrt{X_2}$ endlich.

In R_2^2 muss daher $\overset{3}{\overline{f(x_1,x_2)}}$ in seinen Constanten so bestimmt werden, dass der Zähler von R_2^2 im Punkte $x_1, \sqrt{X_1} = x_2, +\sqrt{X_2}$ Null von der zweiten Ordnung wird.

Wir wollen nunmehr die Function $\overset{3}{\overline{f(x_1,x_2)}}$ berechnen.

Da $\overset{3}{\overline{f(x_1,x_2)}}$ eine symmetrische Function in Bezug auf x_1 und x_2 und zwar vom 3ten Grade sein soll, so hat man:

$$9. \quad \ldots \quad \overset{3}{\overline{f(x_1,x_2)}} = \left\{ \begin{array}{l} a_1 x_1^3 x_2^3 + a_2 (x_1^3 x_2^2 + x_1^2 x_2^3) + a_3 (x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3) + \\ + a_4 x_1^2 x_2^2 + a_5 (x_1^3 + x_2^3) + a_6 (x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2) + \\ + a_7 (x_1^2 + x_2^2) + a_8 x_1 x_2 + a_9 (x_1 + x_2) + a_{10} \end{array} \right\}.$$

Die Constanten a sind sämmtlich unabhängig von x_1, x_2. Damit die unter III angegebene Bedingung erfüllt sei, muss sein:

$$10. \quad \ldots \ldots \quad 2\sqrt{X_1^2} + \overset{3}{\overline{f(x_1,x_2)}} = 0,$$

worin

$$\sqrt{X_1^2} = p x_1^5 - (p + p_1) x_1^4 + (p_1 + p_2) x_1^3 - (1 + p_2) x_1^2 + x_1,$$

wenn gesetzt wird:

$$p = \varkappa^2 \lambda^2 \mu^2 \qquad p_1 = \varkappa^2 \lambda^2 + \varkappa^2 \mu^2 + \lambda^2 \mu^2 \qquad p_2 = \varkappa^2 + \lambda^2 + \mu^2.$$

Da die Gleichung 10. für jeden Werth von x_1 erfüllt sein muss, so ergeben sich für die Constanten a folgende Werthe:

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = -p, \qquad a_4 = -2a_3 + 2p + 2p_1 \qquad a_6 = -a_5 - p_1 - p_2$$
$$a_8 = -2a_7 + 2 + 2p_2 \qquad a_9 = -1 \qquad a_{10} = 0,$$

worin die 3 Constanten a_3, a_5, a_7 noch unbestimmt sind.

Bezeichnen wir den Ausdruck, welcher aus Gleichung 9. durch Substitution der oben erhaltenen Werthe entsteht, mit $f(x_1, x_2)$, so ist für alle zehn r_2^2, in denen der Zähler eine gerade Charakteristik besitzt:

$$11. \quad \ldots \ldots \quad \frac{\vartheta^2{}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2}_{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2}(u_1 + u_2)}{\vartheta^2{}^{11}_{01}(u_1 + u_2)} = C \cdot \frac{2\sqrt{X_1} \cdot \sqrt{X_2} + f(x_1, x_2)}{(x_1 - x_2)^2}.$$

Setzen wir hierin beispielsweise:

$$x_2 = 0, \text{ so wird: } \frac{\vartheta^{2\varepsilon_1,\ \varepsilon_2}_{\varepsilon_1'+1,\ \varepsilon_2'}(u_1)}{\overset{2}{\vartheta}{}^{11}_{11}(u_1)} = C \cdot \frac{-1 + a_7 x_1 + a_5 x_1^2}{x_1}$$

und

$$x_2 = 1, \quad " \quad " \quad \frac{\vartheta^{2\varepsilon_1,\ \varepsilon_2}_{\varepsilon_1',\ \varepsilon_2'}(u_1)}{\overset{2}{\vartheta}{}^{11}_{01}(u_1)} = C \cdot \frac{(-p + a_3 + a_5) x_1^2 + (p_1 + a_7 - a_3 - p_2) x_1 + 1 - a_5 - a_7}{(x_1 - 1)}.$$

Für die beiden linken Seiten lassen sich aus der Tafel II die entsprechenden algebraischen Ausdrücke entnehmen. Und alsdann liefert eine blosse Vergleichung die Werthe für die Constanten a_3, a_5, a_7. Es ist wohl überflüssig, den Algorithmus an einem speciellen Falle zu exemplificiren.

§ VI.

Zum Ausgangspunkt unserer weiteren Betrachtungen wählen wir die von Brill in der citirten Abhandlung gegebene Beziehung:

$$1. \quad c \,.\, \vartheta^{01}_{01}(\alpha + u) \,.\, \vartheta^{01}_{01}(\alpha - u) = \overset{2}{\vartheta}{}^{01}_{01}(\alpha) \,.\, \overset{2}{\vartheta}{}^{11}_{11}(u) - \overset{2}{\vartheta}{}^{11}_{11}(\alpha) \,.\, \overset{2}{\vartheta}{}^{01}_{01}(u) - \\ - \overset{2}{\vartheta}{}^{11}_{01}(\alpha) \,.\, \overset{2}{\vartheta}{}^{01}_{11}(u) + \overset{2}{\vartheta}{}^{01}_{11}(\alpha) \,.\, \overset{2}{\vartheta}{}^{11}_{01}(u).$$

Hierin bedeutet c eine Constante. Ausserdem ist gesetzt:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \int_1^{a_1} du + \int_1^{a_2} du; \qquad u = u_1 + u_2 = \int_1^{x_1} du + \int_1^{x_2} du$$

$$\alpha' = \alpha_1' + \alpha_2' = \int_1^{a_1} du' + \int_1^{a_2} du'; \qquad u' = u_1' + u_2' = \int_1^{x_1} du' + \int_1^{x_2} du'.$$

Aus der Relation 1. resultirt nun unmittelbar die folgende Formel:

$$2. \quad \chi = c \,.\, \frac{\vartheta^{01}_{01}(\alpha + u)\, \vartheta^{01}_{01}(\alpha - u)}{\overset{2}{\vartheta}{}^{11}_{01}(\alpha)\, \overset{2}{\vartheta}{}^{11}_{01}(u)} = (1 - x_1)(1 - x_2) - (1 - a_1)(1 - a_2) + \\ + x_1 x_2 \cdot \left[\frac{\sqrt{a_2 \,.\, 1 - a_2 \,.\, 1 - \varkappa^2 a_1 \,.\, 1 - \lambda^2 a_1 \,.\, 1 - \mu_2 a_1} - \sqrt{a_1 \,.\, 1 - a_1 \,.\, 1 - \varkappa^2 a_2 \,.\, 1 - \lambda^2 a_2 \,.\, 1 - \mu^2 a_2}}{a_2 - a_1}\right]^2 - \\ - a_1 a_2 \left[\frac{\sqrt{x_2 \,.\, 1 - x_2 \,.\, 1 - \varkappa^2 x_1 \,.\, 1 - \lambda^2 x_1 \,.\, 1 - \mu^2 x_1} - \sqrt{x_1 \,.\, 1 - x_1 \,.\, 1 - \varkappa^2 x_2 \,.\, 1 - \lambda^2 x_2 \,.\, 1 - \mu^2 x_2}}{x_2 - x_1}\right]^2.$$

Setzen wir $a_2 = 0$, so wird:

$$3. \quad \ldots \underset{(a_2 = 0)}{\chi} = c \cdot \frac{\vartheta^{01}_{11}(\alpha_1 + u_1 + u_2)\, \vartheta^{01}_{11}(\alpha_1 - u_1 - u_2)}{\overset{2}{\vartheta}{}^{11}_{11}(\alpha_1)\, \overset{2}{\vartheta}{}^{11}_{01}(u_1 + u_2)} = \frac{(a_1 - x_1)(a_1 - x_2)}{a_1}.$$

Zunächst differenziren wir $\lg \chi$ nach α und dann nach α'; multipliciren die beiden so erhaltenen Gleichungen mit du resp. du' und addiren sie. Alsdann kommt:

$$4. \quad . \quad \frac{\partial \lg \chi}{\partial \alpha} du + \frac{\partial \lg \chi}{\partial \alpha'} du' = d \lg \frac{\vartheta^{01}_{01}(u + \alpha)}{\vartheta^{01}_{01}(u - \alpha)} - \frac{\partial \lg \overset{2}{\vartheta}{}^{11}_{01}(\alpha)}{\partial \alpha} du - \frac{\partial \lg \overset{2}{\vartheta}{}^{11}_{01}(\alpha)}{\partial \alpha'} du'.$$

Nun ist:

$$\frac{\partial \lg \chi}{\partial \alpha} du + \frac{\partial \lg \chi}{\partial \alpha'} du' = \left[\frac{\partial \lg \chi}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial a_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \lg \chi}{\partial a_2} \cdot \frac{\partial a_2}{\partial \alpha}\right] du + \left[\frac{\partial \lg \chi}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial a_1}{\partial \alpha'} + \frac{\partial \lg \chi}{\partial a_2} \cdot \frac{\partial a_2}{\partial \alpha'}\right] du'.$$

Die hierin auftretenden partiellen Derivirten $\frac{\partial a_1}{\partial \alpha}, \frac{\partial a_1}{\partial \alpha'} \cdots$ ergeben sich aus:

$$d\alpha = \frac{B_1 + C_1 a_1}{\sqrt{A_1}} da_1 + \frac{B_1 + C_1 a_2}{\sqrt{A_2}} da_2 \qquad d\alpha' = \frac{B_1' + C_1' a_1}{\sqrt{A_1}} da_1 + \frac{B_1' + C_1' a_2}{\sqrt{A_2}} da_2,$$

worin gesetzt ist:

$$\sqrt{A} = \sqrt{a \,.\, 1 - a \,.\, 1 - \varkappa^2 a \,.\, 1 - \lambda^2 a \,.\, 1 - \mu^2 a}\,;$$

nämlich:

$$5. \quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial \alpha} &= \frac{(B_1' + C_1' a_2)\sqrt{A_1}}{(a_2 - a_1)(B_1 C_1' - B_1' C_1)}; & \frac{\partial a_2}{\partial \alpha} &= -\frac{(B_1' + C_1' a_1)\sqrt{A_2}}{(a_2 - a_1)(B_1 C_1' - B_1' C_1)} \\ \frac{\partial a_1}{\partial \alpha'} &= -\frac{(B_1 + C_1 a_2)\sqrt{A_1}}{(a_2 - a_1)(B_1 C_1' - B_1' C_1)}; & \frac{\partial a_2}{\partial \alpha'} &= \frac{(B_1 + C_1 a_1)\sqrt{A_2}}{(a_2 - a_1)(B_1 C_1' - B_1' C_1)}. \end{aligned}\right.$$

Demnach nimmt jetzt die Gleichung 4. die folgende Gestalt an:

$$d \lg \frac{\vartheta_{01}^{01}(u + \alpha)}{\vartheta_{01}^{01}(u - \alpha)} - \frac{\partial \lg \overset{2}{\vartheta}{}_{01}^{11}(\alpha)}{\partial \alpha} du - \frac{\partial \lg \overset{2}{\vartheta}{}_{01}^{11}(\alpha)}{\partial \alpha'} du' =$$

$$= \frac{du}{(a_2 - a_1)(B_1 C_1' - B_1' C_1)} \left\{ \frac{\partial \lg \chi}{\partial a_1} (B_1' + C_1' a_2)\sqrt{A_1} - \frac{\partial \lg \chi}{\partial a_2} (B_1' + C_1' a_1)\sqrt{A_2} \right\} +$$

$$+ \frac{du'}{(a_2 - a_1)(B_1 C_1' - B_1' C_1)} \left\{ \frac{\partial \lg \chi}{\partial a_2} (B_1 + C_1 a_1)\sqrt{A_2} - \frac{\partial \lg \chi}{\partial a_1} (B_1 + C_1 a_2)\sqrt{A_1} \right\}.$$

Beachtet man die Identität:

$$(B_1 + C_1 x_\nu)(B_1' + C_1' x_i) - (B_1' + C_1' x_\nu)(B_1 + C_1 x_i) = (x_i - x_\nu)(B_1 C_1' - B_1' C_1),$$

so erhält man nach einiger Rechnung:

$$6. \quad d \lg \frac{\vartheta_{01}^{01}(u + \alpha)}{\vartheta_{01}^{01}(u - \alpha)} - \frac{\partial \lg \overset{2}{\vartheta}{}_{01}^{11}(\alpha)}{\partial \alpha} du - \frac{\partial \lg \overset{2}{\vartheta}{}_{01}^{11}(\alpha)}{\partial \alpha'} du' = \frac{1}{(a_1 - a_2)\chi} \left\{ K_1 \cdot \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + K_2 \cdot \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} \right\},$$

worin gesetzt ist:

$$K_1 = (x_1 - a_2)\sqrt{A_1} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial a_1} - (x_1 - a_1)\sqrt{A_2} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial a_2}$$

und

$$K_2 = (x_2 - a_2)\sqrt{A_1} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial a_1} - (x_2 - a_1)\sqrt{A_2} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial a_2}.$$

In Formel 6. möge nunmehr $a_2 = 0$ gewählt werden. Alsdann ist:

$$\left[\sqrt{A_1} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial a_1}\right]_{a_2 = 0} = \sqrt{A_1} \cdot \left(1 - \frac{x_1 x_2}{a_1^2}\right) \qquad \left[\sqrt{A_2} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial a_2}\right]_{a_2 = 0} = -\sqrt{A_1} \cdot \frac{x_1 x_2}{a_1^2}$$

und demgemäss haben wir für K_1 und K_2 die Werthe:

$$K_1 = \frac{(a_1 - x_2)\, x_1}{a_1} \cdot \sqrt{A_1} \qquad K_2 = \frac{(a_1 - x_1)\, x_2}{a_1} \cdot \sqrt{A_1}.$$

Die Formel 6. aber verwandelt sich in die wichtige Beziehung:

$$d \lg \frac{\vartheta_{11}^{01}(u+\alpha_1)}{\vartheta_{11}^{01}(u-\alpha_1)} - \frac{\partial \lg \overset{2}{\vartheta}{}_{11}^{11}(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} du - \frac{\partial \lg \overset{2}{\vartheta}{}_{11}^{11}(\alpha_1)}{\partial \alpha_1'} du' = \frac{\sqrt{A_1}}{a_1} \left\{ \frac{x_1 \, dx_1}{(a_1 - x_1)\sqrt{X_1}} + \frac{x_2 \, dx_2}{(a_1 - x_2)\sqrt{X_2}} \right\}.$$

Integriren wir diese Differentialgleichung, so resultirt:

$$7. \quad \frac{a_1}{\sqrt{A_1}} \left\{ \lg \frac{\vartheta_{11}^{01}(u+\alpha_1)}{\vartheta_{11}^{01}(u-\alpha_1)} - u \cdot \frac{\partial \lg \overset{2}{\vartheta}{}_{11}^{11}(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} - u' \cdot \frac{\partial \lg \overset{2}{\vartheta}{}_{11}^{11}(\alpha_1)}{\partial \alpha_1'} \right\} = \int_1^{x_1} \frac{x_1 \, dx_1}{(a_1 - x_1)\sqrt{X_1}} + \int_1^{x_2} \frac{x_2 \, dx_2}{(a_1 - x_2)\sqrt{X_2}} + \text{const.}$$

Zur Bestimmung der additiven Constanten setzen wir hierin $x_1 = x_2 = 1$. Dann erscheint der Quotient $\frac{\vartheta_{11}^{01}(u+\alpha_1)}{\vartheta_{11}^{01}(u-\alpha_1)}$ unter der Form $\frac{0}{0}$. Durch Differentiation des Zählers und des Nenners nach x_1 ergiebt sich indess, dass dieser Quotient für $x_1 = x_2 = 1$ den Werth 1 hat, dass mithin const. $= 0$ zu setzen ist.

Aus der unter 7. gewonnenen Gleichung lassen sich sehr einfach analoge Relationen für diejenigen Transcendenten III. Gattung herleiten, in denen der Zähler des unter dem Integralzeichen stehenden Ausdrucks eine Abel'sche Function ist.

Man braucht zu der Gleichung 7. nur die folgende identische Gleichung zu addiren:

$$\frac{c\sqrt{A_1}}{a_1} \cdot \frac{C_1' \, du - C_1 \, du'}{B_1 C_1' - B_1' C_1} = \frac{c\sqrt{A_1}}{a_1} \left\{ \frac{a_1 - x_1}{a_1 - x_1} \cdot \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{a_1 - x_2}{a_1 - x_2} \cdot \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} \right\},$$

worin $c = \frac{\nu}{\nu - a_1}$ gesetzt ist und ν irgend einen der Verzweigungspunkte: 0, 1, $\frac{1}{\varkappa^2}$, $\frac{1}{\lambda^2}$, $\frac{1}{\mu^2}$, $-\infty$ repräsentire.

Dadurch gewinnt man ohne Mühe die allgemeinere Relation:

$$8. \quad \lg \frac{\vartheta_{11}^{01}(u+\alpha_1)}{\vartheta_{11}^{01}(u-\alpha_1)} - \left[\frac{\partial \lg \overset{2}{\vartheta}{}_{11}^{11}(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} - \frac{\nu \, . \, C_1' \, . \sqrt{A_1}}{a_1(\nu - a_1)(B_1 C_1' - B_1' C_1)} \right] u -$$

$$- \left[\frac{\partial \lg \overset{2}{\vartheta}{}_{11}^{11}(\alpha_1)}{\partial \alpha_1'} + \frac{\nu \, . \, C_1 \, . \sqrt{A_1}}{a_1(\nu - a_1)(B_1 C_1' - B_1' C_1)} \right] u'$$

$$= \frac{\sqrt{A_1}}{\nu - a_1} \left\{ \int_1^{x_1} \frac{\nu - x_1}{a_1 - x_1} \cdot \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \int_1^{x_2} \frac{\nu - x_2}{a_1 - x_2} \cdot \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} \right\}.$$

Uebrigens können die durch die eckigen Klammern eingeschlossenen Ausdrücke mit Rücksicht auf die in Tafel III gegebenen Relationen 16. bis 23. noch wesentlich vereinfacht werden.

Setzen wir $\nu = \frac{1}{\lambda^2}$, so erhalten wir die Formel:

$$9. \quad \int_1^{x_1} \frac{1 - \lambda^2 x_1}{a_1 - x_1} \cdot \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \int_1^{x_2} \frac{1 - \lambda^2 x_2}{a_1 - x_2} \cdot \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} =$$

$$= \frac{1 - \lambda^2 a_1}{\sqrt{A_1}} \left\{ \lg \frac{\vartheta_{11}^{01}(u+\alpha_1)}{\vartheta_{11}^{01}(u-\alpha_1)} - \left[\frac{\partial \lg \overset{2}{\vartheta}{}_{11}^{11}(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} - \frac{C_1' \sqrt{A_1}}{a_1(1 - \lambda^2 a_1)(B_1 C_1' - B_1' C_1)} \right] \cdot u - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{\partial \lg \overset{2}{\vartheta}{}_{11}^{11}(\alpha_1)}{\partial \alpha_1'} + \frac{C_1 \sqrt{A_1}}{a_1(1 - \lambda^2 a_1)(B_1 C_1' - B_1' C_1)} \right] \cdot u' \right\}.$$

Oder:

$$10.\quad \int_1^{x_1}\frac{1-\lambda^2 x_1}{a_1-x_1}\cdot\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}+\int_1^{x_2}\frac{1-\lambda^2 x_2}{a_1-x_2}\cdot\frac{dx_2}{\sqrt{X_2}}=\frac{1-\lambda^2 a_1}{\sqrt{A_1}}\left\{\lg\frac{\vartheta_{11}^{01}(u+\alpha_1)}{\vartheta_{11}^{01}(u-\alpha_1)}-u\cdot\frac{\partial\lg\overset{2}{\vartheta}{}_{00}^{00}(\alpha_1)}{\partial\alpha_1}-u'\cdot\frac{\partial\lg\overset{2}{\vartheta}{}_{00}^{00}(\alpha_1)}{\partial\alpha_1'}\right\}.$$

Wir beschäftigen uns jetzt mit der Darstellung desjenigen Integrals II. Gattung, welches wie J_1 im Punkte $\frac{1}{\mu^2}$ algebraisch unendlich wird. Ein solches Integral lässt sich direct aus Formel 10. herleiten. Man braucht darin nur $a_1=\frac{1}{\mu^2}$ zu setzen. Da indess dabei die rechte Seite jener Formel die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annimmt, so muss man erst nach den bekannten Methoden den wahren Werth jenes Ausdrucks ermitteln.

Für $a_1=\frac{1}{\mu^2}$ wird aus 10.:

$$11.\quad \int_1^{x_1}\frac{1-\lambda^2 x_1}{1-\mu^2 x_1}\cdot\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}+\int_1^{x_2}\frac{1-\lambda^2 x_2}{1-\mu^2 x_2}\cdot\frac{dx_2}{\sqrt{X_2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\mu^2-\lambda^2}{(\mu^2-1)(\mu^2-\varkappa^2)}}\left\{\frac{\lg\frac{\vartheta_{11}^{01}(u+\alpha_1)}{\vartheta_{11}^{01}(u-\alpha_1)}-u\cdot\frac{\partial\lg\overset{2}{\vartheta}{}_{00}^{00}(\alpha_1)}{\partial\alpha_1}-u'\cdot\frac{\partial\lg\overset{2}{\vartheta}{}_{00}^{00}(\alpha_1)}{\partial\alpha_1'}}{\sqrt{1-\mu^2 a_1}}\right\}_{a_1=\frac{1}{\mu^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{\mu^2-\lambda^2}{(\mu^2-1)(\mu^2-\varkappa^2)}}\left\{\frac{\left[\frac{\partial\lg\vartheta_{11}^{01}(u+\alpha_1)}{\partial u}+\frac{\partial\lg\vartheta_{11}^{01}(u-\alpha_1)}{\partial u}-2u\cdot\frac{\partial^2\lg\vartheta_{00}^{00}(\alpha_1)}{\partial\alpha_1^2}-2u'\cdot\frac{\partial^2\lg\vartheta_{00}^{00}(\alpha_1)}{\partial\alpha_1\,\partial\alpha_1'}\right]\frac{d\alpha_1}{da_1}}{-\frac{\mu^2}{2\sqrt{1-\mu^2 a_1}}}\right\}$$

$$+\sqrt{\frac{\mu^2-\lambda^2}{(\mu^2-1)(\mu^2-\varkappa^2)}}\left\{\frac{\left[\frac{\partial\lg\vartheta_{11}^{01}(u+\alpha_1)}{\partial u'}+\frac{\partial\lg\vartheta_{11}^{01}(u-\alpha_1)}{\partial u'}-2u\cdot\frac{\partial^2\lg\vartheta_{00}^{00}(\alpha_1)}{\partial\alpha_1\,\partial\alpha_1'}-2u'\cdot\frac{\partial^2\lg\vartheta_{00}^{00}(\alpha_1)}{\partial\alpha_1'^2}\right]\frac{d\alpha_1'}{da_1}}{-\frac{\mu^2}{2\sqrt{1-\mu^2 a_1}}}\right\}.$$

Und hierin ist rechter Hand $a_1=\frac{1}{\mu^2}$ zu setzen.

Zunächst ist:

$$\left[\frac{\frac{d\alpha_1}{da_1}}{\frac{\mu^2}{\sqrt{1-\mu^2 a_1}}}\right]_{a_1=\frac{1}{\mu^2}}=\frac{B_1\mu^2+C_1}{\sqrt{\mu^2-1\,.\,\mu^2-\lambda^2\cdot\mu^2-\varkappa^2}}\qquad\left[\frac{\frac{d\alpha_1'}{da_1}}{\frac{\mu^2}{\sqrt{1-\mu^2 a_1}}}\right]_{a_1=\frac{1}{\mu^2}}=\frac{B_1'\mu^2+C_1'}{\sqrt{\mu^2-1\,.\,\mu^2-\lambda^2\,.\,\mu^2-\varkappa^2}}$$

$$\vartheta_{00}^{00}\Big(v+\int_1^{\frac{1}{\mu^2}}du\Big)=e^{-\frac{a_{11}}{4}+v}\cdot\vartheta_{01}^{10}(v)\qquad\vartheta_{11}^{01}\Big(v+\int_1^{\frac{1}{\mu^2}}du\Big)=e^{-\frac{a_{11}}{4}+\frac{i\pi}{2}+v}\cdot\vartheta_{10}^{11}(v)$$

$$\vartheta_{11}^{01}\Big(v-\int_1^{\frac{1}{\mu^2}}du\Big)=e^{-\frac{a_{11}}{4}+\frac{i\pi}{2}-v}\cdot\vartheta_{10}^{11}(v).$$

Allgemein hat man ferner:

$$\frac{\partial^2 \lg \vartheta(u)}{\partial u^2} = \frac{\frac{\partial^2 \vartheta(u)}{\partial u^2}}{\vartheta(u)} - \left[\frac{\frac{\partial \vartheta(u)}{\partial u}}{\vartheta(u)}\right]^2 \qquad \frac{\partial^2 \lg \vartheta(u)}{\partial u\, \partial u'} = \frac{\frac{\partial^2 \vartheta(u)}{\partial u\, \partial u'}}{\vartheta(u)} - \frac{\frac{\partial \vartheta(u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vartheta(u)}{\partial u'}}{\vartheta^2(u)}.$$

Nun ist aber: $\left[\frac{\partial \vartheta_{01}^{10}(v)}{\partial v}\right]_{v=v'=0} = \left[\frac{\partial \vartheta_{01}^{10}(v)}{\partial v'}\right]_{v=v'=0} = 0$ und somit:

$$\left[\frac{\partial^2 \lg \vartheta_{00}^{00}(\alpha_1)}{\partial \alpha_1^2}\right]_{a_1=\frac{1}{\mu^2}} = \left[\frac{\frac{\partial^2 \vartheta_{01}^{10}(v)}{\partial v^2}}{\vartheta_{01}^{10}(v)}\right]_{v=v'=0} = \frac{\frac{\partial^2 \vartheta_{01}^{10}}{\partial v^2}}{\vartheta_{01}^{10}}; \text{ etc.}$$

Mit Rücksicht auf diese Beziehungen nimmt Gleichung 11. folgende Form an:

$$12. \quad \int_1^{x_1} \frac{1-\lambda^2 x_1}{1-\mu^2 x_1} \cdot \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \int_1^{x_2} \frac{1-\lambda^2 x_2}{1-\mu^2 x_2} \cdot \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} =$$

$$= \frac{4}{\mu_1^2 \cdot \mu_x^2} \left\{ (B_1 \mu^2 + C_1) \frac{\partial \lg \vartheta_{10}^{11}(u)}{\partial u} + (B_1' \mu^2 + C_1') \frac{\partial \lg \vartheta_{10}^{11}(u)}{\partial u'} - g u - g' u' \right\},$$

wenn g und g' folgende Bedeutung haben:

$$g = \frac{(B_1 \mu^2 + C_1) \frac{\partial^2 \vartheta_{01}^{10}}{\partial v^2} + (B_1' \mu^2 + C_1') \frac{\partial^2 \vartheta_{01}^{10}}{\partial v\, \partial v'}}{\vartheta_{01}^{10}} \qquad g' = \frac{(B_1 \mu^2 + C_1) \frac{\partial^2 \vartheta_{01}^{10}}{\partial v\, \partial v'} + (B_1' \mu^2 + C_1') \frac{\partial^2 \vartheta_{01}^{10}}{\partial v'^2}}{\vartheta_{01}^{10}}.$$

§ VII.

Unsere Integrale J_1 und J_2 lassen sich jetzt unmittelbar aus den Relationen 12. und 10. ableiten.

In Gleichung 10. setzen wir: $x_1 = x$ und $x_2 = 1$, d. h.

$$u_2 = 0 \text{ und } u_1 = u = \int_1^x \frac{B_1 + C_1 x}{\sqrt{X}}\, dx \qquad u_2' = 0 \text{ und } u_1' = u' = \int_1^x \frac{B_1' + C_1' x}{\sqrt{X}}\, dx$$

$$a_1 = a \quad " \quad \alpha_1 = \alpha = \int_1^a \frac{B_1 + C_1 x}{\sqrt{X}}\, dx \qquad \alpha_1' = \alpha' = \int_1^a \frac{B_1' + C_1' x}{\sqrt{X}}\, dx,$$

dann gewinnen wir für J_2:

$$1. \quad . \quad . \quad J_2 = b' \sqrt{\frac{1-\lambda^2 a}{a \,.\, 1-a \,.\, 1-x^2 a \,.\, 1-\mu^2 a}} \left\{ \lg \frac{\vartheta_{11}^{01}(u+\alpha)}{\vartheta_{11}^{01}(u-\alpha)} - e \,.\, u - e' \,.\, u' \right\},$$

falls wir setzen:

$$e = \frac{\partial \lg \overset{2}{\vartheta}{}_{00}^{00}(\alpha)}{\partial \alpha} \qquad e' = \frac{\partial \lg \overset{2}{\vartheta}{}_{00}^{00}(\alpha)}{\partial \alpha'}.$$

In Gleichung 12. aber setzen wir $x_1 = x$ und $x_2 = 0$, d. h.

$$u_2 = -\frac{i\pi}{2} \qquad u_2' = 0,$$

dann wird mit Rücksicht darauf dass:

$$\vartheta^{11}_{10}(v + \int_1^0 du) = \text{const.}\ \vartheta^{11}_{00}(v)$$

2. $$\int_1^x \frac{1 - \lambda^2 x}{1 - \mu^2 x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{X}} + \int_1^0 \frac{1 - \lambda^2 u}{1 - \mu^2 x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{X}} =$$

$$= \frac{4}{\mu_1^2 \mu_x^2} \left\{ (B_1 \mu^2 + C_1) \frac{\partial \lg \vartheta^{11}_{00}(u)}{\partial u} + (B_1' \mu^2 + C_1') \frac{\partial \lg \vartheta^{11}_{00}(u)}{\partial u'} - g\left(u - \frac{i\pi}{2}\right) - g' u' \right\}.$$

Wählen wir hierin $x = 1$, so entsteht:

3. . . . . $$\int_1^0 \frac{1 - \lambda^2 x}{1 - \mu^2 x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{4}{\mu_1^2 \mu_x^2} \cdot \frac{i\pi}{2} \cdot g.$$

Durch Subtraction der Gleichung 3. von Gleichung 2. resultirt:

$$\int_1^x \frac{1 - \lambda^2 x}{1 - \mu^2 x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{4}{\mu_1^2 \mu_x^2} \left\{ (B_1 \mu^2 + C_1) \frac{\partial \lg \vartheta^{11}_{00}(u)}{\partial u} + (B_1' \mu^2 + C_1') \frac{\partial \lg \vartheta^{11}_{00}(u)}{\partial u'} - gu - g'u' \right\}.$$

Und demgemäss hat J_1 den folgenden Ausdruck:

4. . $$J_1 = \frac{4b}{\mu_1^2 \mu_x^2} \left\{ (B_1 \mu^2 + C_1) \frac{\partial \lg \vartheta^{11}_{00}(u)}{\partial u} + (B_1' \mu^2 + C_1') \frac{\partial \lg \vartheta^{11}_{00}(u)}{\partial u'} - gu - g'u' \right\}.$$

§ VIII.

Aus Formel 1. des § IV wird unter Benutzung der in 4. des vorigen Paragraphen gegebenen Relation:

1. . $$t = q \left\{ (B_1 \mu^2 + C_1) \frac{\partial \lg \vartheta^{11}_{00}(u)}{\partial u} + (B_1' \mu^2 + C_1') \frac{\partial \lg \vartheta^{11}_{00}(u)}{\partial u'} - g \cdot u - g' \cdot u' \right\},$$

wenn $q = \frac{4b}{\mu_1^2 \mu_x^2} \sqrt{\frac{rs}{2h'}}$ gesetzt wird und die Constanten B_1, C_1, B_1', C_1' die unter 1. des § V gegebenen Werthe haben.

Die Formel 2. des § IV verwandelt sich mit Rücksicht auf Gl. 1. des vorigen Paragraphen in:

2. . $$\psi = \psi_0 + p \,.\, \text{arctg} \left\{ \sqrt{\frac{A+1}{A-1}} \,\text{tg}\, \frac{\omega}{2} \right\} - \frac{\omega}{2} \pm q' \left\{ \lg \frac{\vartheta^{01}_{11}(u + \alpha)}{\vartheta^{01}_{11}(u - \alpha)} - e \cdot u - e'u' \right\},$$

worin eingeführt ist:

$$q' = b' \sqrt{C} \sqrt{\frac{1 - \lambda^2 a}{a \,.\, 1 - a \,.\, 1 - \varkappa^2 a \,.\, 1 - \mu^2 a}}.$$

Diese Beziehung entspricht dem Falle wo $1 < D < \infty$.

Ist andererseits $-1 < D < +1$, so kommt:

3. $$\psi = \psi_0 + \frac{\sigma}{2} - p \cdot \text{arctg} \left\{ \sqrt{\frac{A+1}{A-1}} \cdot \text{tg}\, \frac{\sigma}{2} \right\} - \frac{\omega}{2} + p \cdot \text{arctg} \left\{ \sqrt{\frac{A+1}{A-1}} \,\text{tg}\, \frac{\omega}{2} \right\} \pm$$

$$\pm q' \left\{ \lg \frac{\vartheta^{01}_{11}(u + \alpha_1)}{\vartheta^{01}_{11}(u - \alpha_1)} - e \cdot u - e' \cdot u' \right\}.$$

Setzen wir übrigens fest, dass in dem Falle, wo das Secundärsystem vollständige Umschwingungen macht, die die Anfangslage des primären Systems bestimmende Grösse ψ_0 den Werth Null hat, und dass ferner in dem Falle, wo die secundäre Masse pendelartige Oscillationen vollführt, der Anfangslage des primären Systems der Winkel:

4. . . . . $\psi_0 = p \, . \, \text{arctg}\left\{\sqrt{\frac{A+1}{A-1}} \, \text{tg} \frac{\sigma}{2}\right\} - \frac{\sigma}{2}$

entspricht, so gewinnen wir die für beide Fälle zu verwerthende Formel:

5. . $\psi = p \cdot \text{arctg}\left\{\sqrt{\frac{A+1}{A-1}} \, \text{tg} \frac{\omega}{2}\right\} - \frac{\omega}{2} \pm q' \left\{\lg \frac{\vartheta_{11}^{\bullet 1}(u+\alpha)}{\vartheta_{11}^{\bullet 1}(u-\alpha)} - e \cdot u - e' \cdot u'\right\}.$

Es bedarf wohl kaum des Hinweises, dass die in 1. und 5. für die beiden verschiedenen Fälle unter demselben Symbol auftretenden Constanten beide Mal verschiedene Werthe besitzen, da für $1 < D < \infty$ die Integralmoduln aus I des § IV, für $-1 < D < +1$ aber aus II jenes Paragraphen zu entnehmen sind.

Setzen wir in 1.: $x = \frac{1}{x^2}$, so erhalten wir die Zeit, welche verflossen ist, während das Secundärsystem eine halbe Schwingung ausgeführt hat. Die Schwingungszeit T hat demnach den Werth:

6. . . $T = 2q\left\{B_1 \mu^2 + C_1 + B_1' \mu^2 + C_1' + \frac{g}{2}(a_{11} + a_{12}) + \frac{g'}{2}(a_{12} + a_{22})\right\}.$

Auch diese Beziehung lässt sich in beiden Fällen benutzen, wenn man den hierin auftretenden Constanten nur eine rein symbolische Bedeutung beilegt.

Was die Amplitude betrifft, welche das primäre System während der Zeit T beschreibt, so ist ihr Werth in dem Falle wo: $1 < D < \infty$

$$\Psi = \pi(p-1) + q'\left\{e(a_{11} + a_{12}) + e'(a_{12} + a_{22})\right\}$$

und in dem Falle wo: $-1 < D < +1$

$$\Psi = 2q'\left\{e(a_{11} + a_{12}) + e'(a_{12} + a_{22})\right\}.$$

Den Zeiten $T, 2T, 3T, \ldots$ werden demnach die Azimuthe $\Psi, 2\Psi, 3\Psi, \ldots$ entsprechen.

Ohne Mühe lassen sich aus den Formeln 1. und 5. auch die Zeiten und Azimuthe berechnen, welche der Lage $\omega = \pm \beta$ des Secundärsystems entsprechen. Doch sind diese Relationen nur von untergeordnetem mechanischen Interesse und soll daher an diesem Orte nicht weiter auf ihre Aufstellung eingegangen werden. Wir wenden uns vielmehr sofort zur analytischen Behandlung der noch nicht erledigten Fälle: $D = \sqrt{B}$ und $D = +1$.

§ IX.

Ist $D = \sqrt{B}$, so erhalten wir mit Rücksicht auf die unter Ia des § IV gewonnenen Resultate:

1. . . . . $t = \frac{2}{x}\sqrt{\frac{rs}{h'}}\int_{\varphi_0}^{\varphi} \Delta\varphi \, . \, d\varphi.$

Setzen wir nun: $\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = u$ und $\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = u_0,$

so kommt:

$$2. \quad t = \frac{2}{\varkappa}\sqrt{\frac{rs}{h'}}\left\{E(u,\varkappa) - E(u_0,\varkappa)\right\}.$$

Setzen wir hierin $u = u_0 + 2K$, so erhalten wir die Schwingungsdauer der Periode, nämlich:

$$3. \quad T = \frac{4}{\varkappa}\sqrt{\frac{rs}{h'}} \cdot E$$

und hiernach kann Gl. 2. auch geschrieben werden:

$$4. \quad t = \frac{T}{2E}\left\{E(u) - E(u_0)\right\},$$

worin K und E die vollständigen elliptischen Integrale I. und II. Gattung bedeuten.

Für J_2 hatten wir folgenden Ausdruck aufgestellt:

$$J_2 = \frac{n\sqrt{2}}{\varkappa}\left\{\left(1+\frac{\varkappa^2}{n}\right)\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta\varphi} - \frac{\varkappa^2}{n}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}\right\},$$

Da in dem hierin auftretenden elliptischen Integrale III. Gattung $n = \frac{2}{A-1}$ eine stets positive Grösse ist, wie auch A beschaffen sein mag, so müssen wir, damit der nunmehr einzuführende Parameter a reell ausfalle, mit Jacobi setzen: $n = -\varkappa^2 sn^2 ia$.

Alsdann nimmt J_2 die Form an:

$$J_2 = \frac{n\sqrt{2}}{\varkappa}\left\{u - u_0 + i\left(1+\frac{\varkappa^2}{n}\right)\frac{sn(a,\varkappa')\,cn(a,\varkappa')}{\partial n(a,\varkappa')}\left[\Pi(u,ia) - \Pi(u_0,ia)\right]\right\}$$

und für das Azimuth ψ ergiebt sich:

$$5. \quad \psi = \psi_0 + \varphi_0 + p \cdot \left[\operatorname{arctg}\left\{\sqrt{\frac{A+1}{A-1}}\operatorname{tg}\varphi\right\}\right]_{\varphi_0}^{\varphi} - \varphi \pm$$

$$\pm \frac{n}{\varkappa}\sqrt{2.C}\left\{u - u_0 + i\left(1+\frac{\varkappa^2}{n}\right)\frac{sn(a,\varkappa')\,cn(a,\varkappa')}{\partial n(a,\varkappa')}\left[\Pi(u,ia) - \Pi(u_0,ia)\right]\right\}.$$

Indem wir in diesem Ausdruck die Jacobi'sche Function einführen, nimmt derselbe mit Rücksicht auf die Relation:

$$\Pi(u,ia) = u\,.\,Z(ia) + \tfrac{1}{2}\lg\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)}$$

folgende Gestalt an:

$$6. \quad \psi = \psi_0 + \varphi_0 + p \cdot \left[\operatorname{arctg}\left\{\sqrt{\frac{A+1}{A-1}}\operatorname{tg}\varphi\right\}\right]_{\varphi_0}^{\varphi} - \varphi \pm p'(u-u_0) \pm p'' \cdot \frac{i}{2}\lg\frac{\Theta(u-ia)\,\Theta(u_0+ia)}{\Theta(u+ia)\,\Theta(u_0-ia)}.$$

worin gesetzt ist:

$$p' = \frac{n}{\varkappa}\sqrt{2.C}\left[1 + \left(1+\frac{\varkappa^2}{n}\right)\frac{sn(a,\varkappa')\,cn(a,\varkappa')}{\partial n(a,\varkappa')} \cdot iZ(ia)\right] \qquad p'' = \frac{n}{\varkappa}\sqrt{2C} \cdot \left(1+\frac{\varkappa^2}{n}\right)\frac{sn(a,\varkappa')\,cn(a,\varkappa')}{\partial n(a,\varkappa')}.$$

Vermöge der Relation:

$$iZ(iu,\varkappa) = -\operatorname{tg} am(u,\varkappa')\,.\,\partial n(u,\varkappa') + \frac{\pi\,.\,u}{2KK'} + Z(u,\varkappa')$$

und mit Rücksicht darauf, dass:

$$sn(ia) = i\operatorname{tg} am(a,\varkappa') \qquad cn(a,\varkappa') = \frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2+n}} \qquad sn(a,\varkappa') = \sqrt{\frac{n}{\varkappa^2+n}} \qquad \partial n(a,\varkappa') = \varkappa\sqrt{\frac{n+1}{\varkappa^2+n}}$$

verwandeln sich p' und p'' in:

$$p' = \sqrt{\frac{A^2 - B}{A^2 - 1}} \left\{ \frac{\pi a}{2KK'} + Z(a, \varkappa') \right\} \qquad p'' = \sqrt{\frac{A^2 - B}{A^2 - 1}}.$$

Wir wollen nun die Anfangslage des primären Systems so wählen, dass ψ_0 den folgenden Werth besitzt:

$$\psi_0 = -\varphi_0 + p \cdot \operatorname{arctg}\left\{ \sqrt{\frac{A+1}{A-1}} \operatorname{tg}\varphi_0 \right\} \pm p' \cdot u_0 \mp p'' \cdot \frac{i}{2} \lg \frac{\Theta(u_0 + ia)}{\Theta(u_0 - ia)};$$

dann bekommen wir für das Azimuth die einfachere Formel:

$$7. \quad \psi = -\varphi + p \cdot \operatorname{arctg}\left\{ \sqrt{\frac{A+1}{A-1}} \operatorname{tg}\varphi \right\} \pm p' \cdot u \mp p'' \cdot \frac{i}{2} \lg \frac{\Theta(u + ia)}{\Theta(u - ia)}.$$

Setzen wir hierin einmal $u - K$ für u, das andere Mal $u + K$ für u, so bleibt vermöge der Beziehung: $\Theta(u - K) = \Theta(u + K)$ das periodische Glied in beiden Fällen dasselbe.

Die Differenz der beiden auf diese Weise für das Azimuth gewonnenen Ausdrücke stellt offenbar den Winkel dar, welchen das Primärsystem durchlaufen hat, während vom Secundärsystem eine vollständige relative Umschwingung vollendet ist. Bezeichnen wir diese Differenz mit Ψ, so ist:

$$8. \quad \Psi = 2p' . K + \pi(p - 1)$$

die Periode der Bewegung des Primärsystems.

Zu den Zeiten: 0, T, $2T$, .. ist das Azimuth: ψ_0, Ψ, 2Ψ, ..

Substituiren wir in 8. einmal $u = 2K - u_0$, das andere Mal $u = 2K + u_0$, so ergeben sich folgende Azimuthe:

$$\psi = \Psi - \psi_0 \qquad \psi = \Psi + \psi_0.$$

Der Winkel ψ_0 stellt also denjenigen Winkel dar, den das primäre System durchläuft, während das Secundärsystem aus der Lage $\omega = 2\pi - \omega_0$ in die Lage $\omega = 2\pi$ oder aus der Lage $\omega = 2\pi$ in die Lage $\omega = 2\pi + \omega_0$ einrückt.

Aus der Gleichung:

$$t = \frac{T}{2E}\{E(u) - E(u_0)\} \quad \text{erkennt man, dass} \quad t = \frac{T}{2E} \cdot E(u_0)$$

diejenige Zeit repräsentirt, welche vom Secundärsystem beansprucht wird, um aus der Lage $\omega = 2\pi - \omega_0$ in die Lage $2\pi + \omega_0$ zu kommen oder, in anderen Worten, diejenige Zeit, welche das primäre System zur Zurücklegung des Winkels $2\psi_0$ gebraucht.

Substituirt man in 8. der Reihe nach:

$$u = K, 2K, 3K, \quad \text{d. h.} \quad \omega = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$$

so entsprechen diesen Grössen folgende Azimuthe:

$$\psi = \frac{1}{2} \cdot \Psi, \ \frac{2}{2} \cdot \Psi, \ \frac{3}{2} \cdot \Psi, \ \ldots$$

Es mögen nun noch die Functionen mit complexem Argument in solche mit reellem verwandelt werden. Zu dem Zwecke setzen wir:

$$\lg \frac{\Theta(u - ia)}{\Theta(u + ia)} = 2i\eta \quad \text{oder:} \quad \frac{\Theta(u - ia)}{\Theta(u + ia)} = e^{2i\eta},$$

dann ist:

$$\operatorname{tg}\eta = \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{2i\eta}+1}{e^{2i\eta}-1} = \frac{1}{i}\cdot\frac{\Theta(u-ia)+\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)-\Theta(u+ia)}.$$

Jacobi entwickelt nun in seiner Abhandlung: „Sur la rotation d'un corps" folgende Relationen:

$$\frac{1}{2}\left[\Theta(u-ia)+\Theta(u+ia)\right] = 1-q^{1-b}.(1+q^{2b}).\cos 2x+q^{4-2b}.(1+q^{4b}).\cos 4x-\cdots$$

$$\frac{1}{2i}\left[\Theta(u-ia)-\Theta(u+ia)\right] = -q^{1-b}.(1-q^{2b}).\sin 2x+q^{4-2b}.(1-q^{4b})\sin 4x-\cdots$$

worin gesetzt ist:

$$x=\frac{\pi u}{2K} \qquad b=\frac{a}{K'} \qquad q=e^{-\frac{\pi K'}{K}}.$$

Somit ist:

$$\frac{i}{2}\lg\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)} = -\operatorname{arctg}\cdot\frac{1-q^{1-b}.(1+q^{2b}).\cos 2x+q^{4-2b}.(1+q^{4b}).\cos 4x-\cdots}{q^{1-b}.(1-q^{2b}).\sin 2x-q^{4-2b}.(1-q^{4b}).\sin 4x+\cdots}.$$

§ X.

Wir wenden uns jetzt zur weiteren Behandlung des Grenzfalles $D=+1$.

Die unter 20. und 21. des § IV gewonnenen Integrale J_1 und J_2 sollen jetzt als Functionen von u dargestellt werden, wobei u mit φ durch die Gleichung: $\varphi = am\, u$ verbunden ist.

Zunächst ist zu bemerken, dass n_1 zwischen -1 und $-\infty$, n_2 aber zwischen $-\varkappa^2$ und -1 liegt. Demgemäss haben wir mit Jacobi zu setzen:

1. $n_1 = -\varkappa^2 sn^2(a_1+iK')$ 2. $n_2 = -\varkappa^2 sn^2(ia_2+K)$.

Nach einigen leichten Reductionen erhalten wir alsdann für J_1 und J_2:

$$3.\quad J_1 = \frac{B-1}{\sqrt{2}\sqrt{B}}\left\{\frac{\sqrt{B}-1}{\sqrt{B}+1}\left[u_0-u-\frac{\operatorname{tg} am\, a_1}{\partial n\, a_1}\Big(\Pi(u_0, a_1+iK')-\Pi(u, a_1+iK')\Big)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{4\sqrt{B}}{B-1}\Big[E(u_0)-E(u)\Big]-\frac{2}{\sqrt{B}-1}\left[\frac{sn\,u_0\, cn\,u_0}{\partial n\,u_0}-\frac{sn\,u\, cn\,u}{\partial n\,u}\right]\right\}$$

$$4.\quad J_2 = \frac{\sqrt{B}-1}{(A-1)\sqrt{2}\sqrt{B}}\left\{(1+\sqrt{B})\frac{A-1}{A+1}(u_0-u)+\right.$$
$$+\frac{2(A-\sqrt{B})}{A+1}\cdot\frac{\partial n(a_2,\varkappa')}{\varkappa'^2\, sn(a_2,\varkappa')\, cn(a_2,\varkappa')}\, i\Big[\Pi(u_0, ia_2+K)-\Pi(u, ia_2+K)\Big]-$$
$$\left.-(\sqrt{B}-1)\frac{\operatorname{tg} am\, a_1}{\partial n\, a_1}\Big[\Pi(u_0, a_1+iK')-\Pi(u, a_1+iK')\Big]\right\}.$$

Will man statt der Transcendenten Π und E die Jacobi'sche Function einführen, so hat man folgende Relationen zu benutzen:

$$\Pi(u, a_1+iK') = u\left[\operatorname{cotg} am\, a_1\, \partial n\, a_1+Z(a_1)\right]+\frac{\pi K'}{4K}+\frac{1}{2}\lg\frac{H(a_1-u)}{H(a_1+u)}$$

$$i\,\Pi(u, ia_2+K) = u\left[\frac{\pi a_2}{2KK'}-\frac{\varkappa'^2\, sn(a_2,\varkappa')\, cn(a_2,\varkappa')}{\partial n(a_2,\varkappa')}+Z(a_2,\varkappa')\right]+\frac{i}{2}\lg\frac{\Theta(u-ia_2-K)}{\Theta(u+ia_2+K)}$$

$$E(u) = \frac{E}{K}\cdot u+Z(u),$$

wozu sich noch die aus 1. und 2. resultirenden Beziehungen gesellen:

$$sn\, a_1 = \frac{2\sqrt[4]{B}}{\sqrt{B}+1} \qquad sn\,(a_2, \varkappa') = \frac{\sqrt{2\sqrt{B}}}{\sqrt{A+\sqrt{B}}} \qquad cn\, a_1 = \frac{\sqrt{B}-1}{\sqrt{B}+1} \qquad cn\,(a_2, \varkappa') = \sqrt{\frac{A-\sqrt{B}}{A+\sqrt{B}}}$$

$$\mathfrak{d}n\, a_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{B}-1}{\sqrt{B}+1}} \qquad \mathfrak{d}n\,(a_2, \varkappa') = \sqrt{\frac{A+1}{A+\sqrt{B}}}.$$

Zunächst erhält man:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+n_1 \sin^2\varphi)\,\varDelta\varphi} = -\frac{2\sqrt[4]{B}}{\sqrt{B}-1} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{B}+1}{\sqrt{B}-1}} \left\{ (u-u_0)\cdot Z(a_1) + \frac{1}{2} \lg \frac{H(u-a_1)\, H(u_0+a_1)}{H(u+a_1)\, H(u_0-a_1)} \right\}$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+n_2 \sin^2\varphi)\,\varDelta\varphi} = \frac{\sqrt{2\sqrt{B}}}{\sqrt{B}-1} \sqrt{\frac{A+\sqrt{B}}{A-\sqrt{B}}} (A+1) \left\{ \left(\frac{\pi a_2}{2KK'} + Z(a_2, \varkappa') \right)(u-u_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{i}{2} \lg \frac{\Theta(u-ia_2-K)\,\Theta(u_0+ia_2+K)}{\Theta(u+ia_2+K)\,\Theta(u_0-ia_2-K)} \right\}.$$

Für J_1 und J_2 aber gewinnen wir:

$$5.\quad J_1 = \frac{B-1}{\sqrt{2\sqrt{B}}} \left\{ \lambda\cdot(u-u_0) + \lambda' \lg \frac{H(u-a_1)H(u_0+a_1)}{H(u+a_1)H(u_0-a_1)} + \lambda''(Zu - Zu_0) + \lambda''' \left(\frac{sn\,u\; cn\,u}{\mathfrak{d}n\,u} - \frac{sn\,u_0\; cn\,u_0}{\mathfrak{d}n\,u_0} \right) \right\}$$

$$6.\quad J_2 = \frac{\sqrt{2(\sqrt{B}-1)}}{A-1} \left\{ \mu\cdot(u-u_0) + \mu'\cdot i \lg \frac{\Theta(u-ia_2-K)\,\Theta(u_0+ia_2+K)}{\Theta(u+ia_2+K)\,\Theta(u_0-ia_2-K)} + \mu'' \lg \frac{H(u-a_1)\,H(u_0+a_1)}{H(u+a_1)\,H(u_0-a_1)} \right\},$$

worin der grösseren Uebersichtlichkeit wegen gesetzt ist:

$$\lambda = \frac{\sqrt{2\sqrt{B}}}{\sqrt{B}-1}\cdot Z(a_1) - \frac{4\sqrt{B}}{B-1}\cdot\frac{E}{K} \qquad \lambda' = \frac{\sqrt[4]{B}}{\sqrt{B}-1} \qquad \lambda'' = -\frac{4\sqrt{B}}{B-1} \qquad \lambda''' = \frac{2}{\sqrt{B}-1}$$

$$\mu = \sqrt{\sqrt{B}+1}\cdot Z(a_1) - \left(\frac{\pi a_2}{2KK'} + Z(a_2, \varkappa') \right)\cdot \sqrt{\frac{2(A^2-B)}{(A+1)(\sqrt{B}+1)}} \qquad \mu' = -\sqrt{\frac{A^2-B}{2(A+1)(\sqrt{B}-1)}}$$

$$\mu'' = \tfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt{B}+1}.$$

Nach diesen Resultaten erhalten wir für die Zeit und das Azimuth endgültig folgende Ausdrücke:

$$7.\quad t = q \left\{ \lambda(u-u_0) + \lambda' \lg \frac{H(u-a_1)\,H(u_0+a_1)}{H(u+a_1)\,H(u_0-a_1)} + \lambda''(Zu - Zu_0) + \lambda''' \left(\frac{sn\,u\; cn\,u}{\mathfrak{d}n\,u} - \frac{sn\,u_0\; cn\,u_0}{\mathfrak{d}n\,u_0} \right) \right\}$$

$$8.\quad \psi = p\,.\,\operatorname{arctg}\left\{ \sqrt{\frac{A+1}{A-1}} \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} \right\} - \frac{\omega}{2} + q' \left\{ \mu\,.\,u + \mu' i \lg \frac{\Theta(u-ia_2-K)}{\Theta(u+ia_2+K)} + \mu'' \lg \frac{H(u-a_1)}{H(u+a_1)} \right\},$$

vorausgesetzt, dass wir über die Anfangslage des primären Systems derartig verfügen, dass:

$$\psi_0 = p\,.\,\operatorname{arctg}\left\{ \sqrt{\frac{A+1}{A-1}} \operatorname{tg}\frac{\omega_0}{2} \right\} - \frac{\omega_0}{2} + q' \left\{ \mu u_0 + \mu' i \lg \frac{\Theta(u_0-ia_2-K)}{\Theta(u_0+ia_2+K)} + \mu'' \lg \frac{H(u_0-a_1)}{H(u_0+a_1)} \right.$$

Die Constanten q, q' haben folgende Bedeutungen:

$$q = \sqrt{\frac{rs}{2k'}}\cdot\frac{B-1}{\sqrt{2\sqrt{B}}} \qquad q' = \frac{\sqrt{2(\sqrt{B}-1)}}{A-1}\cdot\sqrt{C}.$$

Die in 8. mit complexem Argument auftretenden Functionen mögen nun noch in solche mit reellem Argument verwandelt werden.

Zu dem Zwecke setzen wir:

$$\lg \frac{\Theta(u - i a_2 - K)}{\Theta(u + i a_2 + K)} = 2 i \eta \quad \text{oder:} \quad \operatorname{tg} \eta = \frac{1}{i} \cdot \frac{\Theta(u - i a_2 - K) + \Theta(u + i a_2 + K)}{\Theta(u + i a_2 + K) - \Theta(u - i a_2 - K)}.$$

Es ist aber:

$$\frac{1}{2}\left[\Theta(u - i a_2 - K) + \Theta(u + i a_2 + K)\right] = 1 + q^{1-b} \cdot (1 + q^{2b}) \cdot \cos 2x + q^{4-2b} \cdot (1 + q^{4b}) \cdot \cos 4x + \cdots$$

$$\frac{1}{2i}\left[\Theta(u - i a_2 - K) - \Theta(u + i a_2 + K)\right] = q^{1-b} \cdot (1 - q^{2b}) \cdot \sin 2x + q^{4-2b} \cdot (1 - q^{4b}) \cdot \sin 4x + \cdots,$$

worin q, b, x folgende Bedeutung haben:

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}} \qquad b = \frac{a_2}{K} \qquad x = \frac{\pi u}{2K}.$$

Beachtet man diese Formeln, so ergiebt sich schliesslich:

$$9. \quad i \lg \frac{\Theta(u - i a_2 - K)}{\Theta(u + i a_2 + K)} = -2 \operatorname{arctg} \frac{1 + q^{1-b} \cdot (1 + q^{2b}) \cdot \cos 2x + q^{4-2b} \cdot (1 + q^{4b}) \cdot \cos 4x + \cdots}{q^{1-b} \cdot (1 - q^{2b}) \sin 2x + q^{4-2b} \cdot (1 - q^{4b}) \sin 4x + \cdots}.$$

Mittelst der beiden Relationen 7. und 8. ist es möglich, für jede Lage des Secundärsystems die entsprechenden Zeiten und Azimuthe zu ermitteln.

Die Function $\sin \varphi$ wird zwischen den Werthen $-\frac{2\sqrt[4]{B}}{\sqrt{B}+1}$ und $+\frac{2\sqrt[4]{B}}{\sqrt{B}+1}$ hin und her schwanken. Die äussersten Grenzen selbst werden aber nie erreicht, da sonst der Winkel ω imaginär ausfallen und infolgedessen seine mechanische Geltung verlieren würde. Doch liegt hierin kein Hinderniss, die in unseren Formeln vorkommenden vollständigen Integrale erster und zweiter Gattung mit Hülfe der üblichen Reihenentwickelungen auszuwerthen.

Die Relation, welche für die Zeit gefunden worden ist, gestattet übrigens noch den bemerkenswerthen Schluss, dass das Secundärsystem die Lage $\omega = 2\pi$ erst nach einer unendlich fernen Zeit erreichen wird. In Wirklichkeit würde es sich also nur um eine asymptotische Annäherung an jene Lage handeln, eine Erscheinung, die bekanntlich auch bei einem gewöhnlichen in der Verticalebene aufgehängten Pendel auftreten kann.

Tafel I.

Die 16 Thetafunctionen sind durch folgende Gleichung definirt:

$$\vartheta^{\varepsilon_1 \varepsilon_2}_{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2}(v_1, v_2) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{a_{11}\left(m+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)^2 + 2a_{12}\left(m+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\left(n+\frac{\varepsilon_2}{2}\right) + a_{22}\left(n+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)^2 + 2\left(m+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\left(v_1 - \frac{\varepsilon'_1}{2}\pi i\right) + 2\left(n+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)\left(v_2 - \frac{\varepsilon'_2}{2}\pi i\right)},$$

worin die Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon'_1, \varepsilon'_2$ den Werth 0 oder 1 haben können. Als einige wesentliche Eigenschaften führen wir folgende an:

2. . . $$\frac{\vartheta^{2\varepsilon_1 \varepsilon_2}_{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2}(v_1 \pm M_1, v_2 \pm M_2)}{\vartheta^{2\nu_1 \nu_2}_{\nu'_1 \nu'_2}(v_1 \pm M_1, v_2 \pm M_2)} = \frac{\vartheta^{2\varepsilon_1 \varepsilon_2}_{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2}(v_1, v_2)}{\vartheta^{2\nu_1 \nu_2}_{\nu'_1 \nu'_2}(v_1, v_2)}, \quad \text{worin: } \begin{cases} M_1 = -\gamma'_1 \pi i + \gamma_1 a_{11} + \gamma_2 a_{12} \\ M_2 = -\gamma'_2 \pi i + \gamma_1 a_{21} + \gamma_2 a_{22} \end{cases}.$$

Die γ bedeuten hier jede beliebige ganze Zahl, die ε und ν nur 0 oder 1.

3. . . $$\frac{\vartheta^{\varepsilon_1 \varepsilon_2}_{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2}(v_1 - \frac{1}{2}M_1)}{\vartheta^{\nu_1 \nu_2}_{\nu'_1 \nu'_2}(v_1 - \frac{1}{2}M_1)} = \frac{\vartheta^{\varepsilon_1+\gamma_1,\, \varepsilon_2+\gamma_2}_{\varepsilon'_1+\gamma'_1,\, \varepsilon'_2+\gamma'_2}(v_1)}{\vartheta^{\nu_1+\gamma_1,\, \nu_2+\gamma_2}_{\nu'_1+\gamma'_1,\, \nu'_2+\gamma'_2}(v_1)} \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}[\gamma_1(\varepsilon'_1 - \nu'_1) + \gamma_2(\varepsilon'_2 - \nu'_2)] + i\pi[\gamma'_1(\varepsilon_1 - \nu_1) + \gamma'_2(\varepsilon_2 - \nu_2)]}.$$

Das zweite Argument ist weggelassen und ausserdem sind hierin für die γ nur die Zahlen 0 oder 1 zu setzen.

4. $$\vartheta^{\varepsilon_1 \varepsilon_2}_{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2}(v_1 + \tfrac{1}{2}M_1) = e^{\frac{i\pi}{2}[\gamma_1(\varepsilon'_1 + \gamma'_1) + \gamma_2(\varepsilon'_2 + \gamma'_2)] - \frac{1}{4}(\gamma_1^2 a_{11} + 2\gamma_1\gamma_2 a_{12} + \gamma_2^2 a_{22}) - \gamma_1 v_1 - \gamma_2 v_2} \cdot \vartheta^{\varepsilon_1+\gamma_1,\, \varepsilon_2+\gamma_2}_{\varepsilon'_1+\gamma'_1,\, \varepsilon'_2+\gamma'_2}(v_1).$$

Auch hierin bedeuten die γ nur Null oder Eins.

5. . . $$\vartheta^{\varepsilon_1 \varepsilon_2}_{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2}(v_1 + M_1) = e^{i\pi(\varepsilon_1\gamma'_1 + \varepsilon_2\gamma'_2 + \varepsilon'_1\gamma_1 + \varepsilon'_2\gamma_2) - \gamma_1^2 a_{11} - 2\gamma_1\gamma_2 a_{12} - \gamma_2^2 a_{22} - 2(\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2)} \cdot \vartheta^{\varepsilon_1 \varepsilon_2}_{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2}(v_1).$$

In dieser Relation repräsentiren die γ jede beliebige ganze Zahl.

6. $$\vartheta^{\varepsilon_1 \varepsilon_2}_{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2}(0,0) = 0 \text{ wenn } \varepsilon_1\varepsilon'_1 + \varepsilon_2\varepsilon'_2 \equiv 1 \text{ mod. } 2.; \left[\frac{\partial\, \vartheta^{\varepsilon_1 \varepsilon_2}_{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2}(v_1)}{\partial v_1}\right]_{v_1=v_2=0} = \left[\frac{\partial\, \vartheta^{\varepsilon_1 \varepsilon_2}_{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2}(v_1)}{\partial v_2}\right]_{v_1=v_2=0} = 0 \text{ wenn } \varepsilon_1\varepsilon'_1 + \varepsilon_2\varepsilon'_2 \equiv 0 \text{ mod. } 2.$$

Im Uebrigen wird jede der 16 Thetafunctionen in 2 Punkten Null von der 1. Ordnung.

Ausserdem ist identisch:

$$\vartheta^{01}_{01}\left(\int_0^x du, \int_0^x du'\right) = \vartheta^{01}_{11}\left(\int_1^x du\right) = \vartheta^{10}_{11}\left(\int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^x du\right) = \vartheta^{10}_{10}\left(\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^x du\right) = \vartheta^{11}_{10}\left(\int_{\frac{1}{\mu^2}}^x du\right) = \vartheta^{11}_{01}\left(\int_{-\infty}^x du\right) = 0^1,$$

wenn gesetzt ist: $du = \frac{B_1 + C_1 x}{\sqrt{X}}\, dx$ und $du' = \frac{B'_1 + C'_1 x}{\sqrt{X}}\, dx$ und ausserdem in jeder Thetafunction die untere Grenze des zweiten Argumentes dieselbe ist wie die des ersten Argumentes.

Tafel II.

1. $\dfrac{\overset{2}{\vartheta}{}^{0\,1}_{0\,1}(u_1)}{\overset{2}{\vartheta}{}^{1\,1}_{0\,1}(u_1)} = \varkappa\,\lambda\,\mu\,x_1$

2. $\dfrac{\overset{2}{\vartheta}{}^{1\,0}_{1\,1}(u_1)}{\overset{2}{\vartheta}{}^{1\,1}_{0\,1}(u_1)} = \dfrac{\lambda\,\mu\,\varkappa_1}{\lambda_\varkappa\,\mu_\varkappa}\,(1-\varkappa^2 x_1)$

3. $\dfrac{\overset{2}{\vartheta}{}^{1\,0}_{1\,0}(u_1)}{\overset{2}{\vartheta}{}^{1\,1}_{0\,1}(u_1)} = \dfrac{\varkappa\,\mu\,\lambda_1}{\lambda_\varkappa\,\mu_\lambda}\,(1-\lambda^2 x_1)$

4. $\dfrac{\overset{2}{\vartheta}{}^{1\,1}_{1\,0}(u_1)}{\overset{2}{\vartheta}{}^{1\,1}_{0\,1}(u_1)} = \dfrac{\varkappa\,\lambda\,\mu_1}{\mu_\varkappa\,\mu_\lambda}\,(1-\mu^2 x_1)$

5. $\dfrac{\overset{2}{\vartheta}{}^{1\,1}_{1\,1}(u_1)}{\overset{2}{\vartheta}{}^{1\,1}_{0\,1}(u_1)} = \varkappa_1\,\lambda_1\,\mu_1 \cdot \dfrac{x_1}{1-x_1}$

6. $\dfrac{\overset{2}{\vartheta}{}^{0\,0}_{1\,1}(u_1)}{\overset{2}{\vartheta}{}^{1\,1}_{0\,1}(u_1)} = \dfrac{\varkappa\,\varkappa_1}{\lambda_\varkappa\,\mu_\varkappa} \cdot \dfrac{1-\lambda^2 x_1 \,.\, 1-\mu^2 x_1}{1-x_1}$

7. $\dfrac{\overset{2}{\vartheta}{}^{0\,1}_{1\,0}(u_1)}{\overset{2}{\vartheta}{}^{1\,1}_{0\,1}(u_1)} = \dfrac{\mu\,\mu_1}{\mu_\varkappa\,\mu_\lambda} \cdot \dfrac{1-\varkappa^2 x_1 \,.\, 1-\lambda^2 x_1}{1-x_1}$

8. $\dfrac{\overset{2}{\vartheta}{}^{0\,0}_{1\,0}(u_1)}{\overset{2}{\vartheta}{}^{1\,1}_{0\,1}(u_1)} = \dfrac{\lambda\,\lambda_1}{\lambda_\varkappa\,\mu_\lambda} \cdot \dfrac{1-\varkappa^2 x_1 \,.\, 1-\mu^2 x_1}{1-x_1}$

9. $\dfrac{\overset{2}{\vartheta}{}^{0\,0}_{0\,0}(u_1)}{\overset{2}{\vartheta}{}^{1\,1}_{0\,1}(u_1)} = \dfrac{\varkappa_1\,\mu_1\,\lambda}{\lambda_\varkappa\,\mu_\lambda} \cdot \dfrac{1-\lambda^2 x_1}{1-x_1}$

10. $\dfrac{\overset{2}{\vartheta}{}^{0\,0}_{0\,1}(u_1)}{\overset{2}{\vartheta}{}^{1\,1}_{0\,1}(u_1)} = \dfrac{\lambda_1\,\mu_1\,\varkappa}{\lambda_\varkappa\,\mu_\varkappa} \cdot \dfrac{1-\varkappa^2 x_1}{1-x_1}$

11. $\dfrac{\overset{2}{\vartheta}{}^{0\,1}_{0\,0}(u_1)}{\overset{2}{\vartheta}{}^{1\,1}_{0\,1}(u_1)} = \dfrac{\varkappa_1\,\lambda_1\,\mu}{\mu_\varkappa\,\mu_\lambda} \cdot \dfrac{1-\mu^2 x_1}{1-x_1}$

12. $\dfrac{\overset{2}{\vartheta}{}^{1\,0}_{0\,1}(u_1)}{\overset{2}{\vartheta}{}^{1\,1}_{0\,1}(u_1)} = \dfrac{\lambda_1\,\mu_1\,\lambda\,\mu}{\lambda_\varkappa\,\mu_\varkappa} \cdot \dfrac{x_1\,(1-\varkappa^2 x_1)}{1-x_1}$

13. $\dfrac{\overset{2}{\vartheta}{}^{1\,0}_{0\,0}(u_1)}{\overset{2}{\vartheta}{}^{1\,1}_{0\,1}(u_1)} = \dfrac{\varkappa_1\,\mu_1\,\mu\,\varkappa}{\lambda_\varkappa\,\mu_\lambda} \cdot \dfrac{x_1\,(1-\lambda^2 x_1)}{1-x_1}$

14. $\dfrac{\overset{2}{\vartheta}{}^{1\,1}_{0\,0}(u_1)}{\overset{2}{\vartheta}{}^{1\,1}_{0\,1}(u_1)} = \dfrac{\varkappa_1\,\lambda_1\,\varkappa\,\lambda}{\mu_\varkappa\,\mu_\lambda} \cdot \dfrac{x_1\,(1-\mu^2 x_1)}{1-x_1}$

15. $\vartheta^{0\,1}_{1\,1}(u_1) = 0^1.$

Hierin ist überall das zweite Argument u_1' weggelassen und überdies gesetzt:

$$u_1 = \int_1^{x_1} \frac{B_1 + C_1 x_1}{\sqrt{X_1}}\,dx_1\,; \qquad u_1' = \int_1^{x_1} \frac{B_1' + C_1' x_1}{\sqrt{X_1}}\,dx_1.$$

Tafel III.

1. $\dfrac{\overset{2}{\vartheta}{}^{0\,1}_{0\,1}(u_1+u_2)}{\overset{2}{\vartheta}{}^{1\,1}_{0\,1}(u_1+u_2)} = \varkappa\,\lambda\,\mu\,x_1\,x_2$

2. $\dfrac{\overset{2}{\vartheta}{}^{0\,1}_{1\,1}(u_1+u_2)}{\overset{2}{\vartheta}{}^{1\,1}_{0\,1}(u_1+u_2)} = \dfrac{\varkappa\,\lambda\,\mu}{\varkappa_1\,\lambda_1\,\mu_1}\,(1-x_1)\,(1-x_2)$

3. $\dfrac{\overset{2}{\vartheta}{}^{1\,0}_{1\,1}(u_1+u_2)}{\overset{2}{\vartheta}{}^{1\,1}_{0\,1}(u_1+u_2)} = \dfrac{\lambda\,\mu}{\varkappa_1\,\lambda_\varkappa\,\mu_\varkappa}\,(1-\varkappa^2 x_1)\,(1-\varkappa^2 x_2)$

4. $\dfrac{\overset{2}{\vartheta}{}^{1\,0}_{1\,0}(u_1+u_2)}{\overset{2}{\vartheta}{}^{1\,1}_{0\,1}(u_1+u_2)} = \dfrac{\varkappa\,\mu}{\lambda_1\,\lambda_\varkappa\,\mu_\lambda}\,(1-\lambda^2 x_1)\,(1-\lambda^2 x_2)$

5. $\dfrac{\overset{2}{\vartheta}{}^{1\,1}_{1\,0}(u_1+u_2)}{\overset{2}{\vartheta}{}^{1\,1}_{0\,1}(u_1+u_2)} = \dfrac{\varkappa\,\lambda}{\mu_1\,\mu_\varkappa\,\mu_\lambda}\,(1-\mu^2 x_1)\,(1-\mu^2 x_2)$

6. $\dfrac{\overset{2}{\vartheta}{}^{1\,1}_{1\,1}(u_1+u_2)}{\overset{2}{\vartheta}{}^{1\,1}_{0\,1}(u_1+u_2)} = \dfrac{1}{\varkappa_1\,\lambda_1\,\mu_1}\left\{\dfrac{\sqrt{x_2 \,.\, 1-x_2 \,.\, 1-\varkappa^2 x_1 \,.\, 1-\lambda^2 x_1 \,.\, 1-\mu^2 x_1} - \sqrt{x_1 \,.\, 1-x_1 \,.\, 1-\varkappa^2 x_2 \,.\, 1-\lambda^2 x_2 \,.\, 1-\mu^2 x_2}}{x_2 - x_1}\right\}$

7. $\dfrac{\overset{2}{\vartheta}{}^{0\,0}_{1\,1}(u_1+u_2)}{\overset{2}{\vartheta}{}^{1\,1}_{0\,1}(u_1+u_2)} = \dfrac{\varkappa}{\varkappa_1\,\lambda_\varkappa\,\mu_\varkappa}\left\{\dfrac{\sqrt{x_2 \,.\, 1-\varkappa^2 x_2 \,.\, 1-x_1 \,.\, 1-\lambda^2 x_1 \,.\, 1-\mu^2 x_1} - \sqrt{x_1 \,.\, 1-\varkappa^2 x_1 \,.\, 1-x_2 \,.\, 1-\lambda^2 x_2 \,.\, 1-\mu^2 x_2}}{x_2 - x_1}\right\}$

8. $$\frac{\overset{2}{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right](u_1+u_2)}{\overset{2}{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right](u_1+u_2)}=\frac{\lambda}{\lambda_1\lambda_\varkappa\mu_\lambda}\left\{\frac{\sqrt{x_2\,.\,1-\lambda^2x_2\,.\,1-x_1\,.\,1-\varkappa^2x_1\,.\,1-\mu^2x_1}-\sqrt{x_1\,.\,1-\lambda^2x_1\,.\,1-x_2\,.\,1-\varkappa^2x_2\,.\,1-\mu^2x_2}}{x_2-x_1}\right\}^2$$

9. $$\frac{\overset{2}{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right](u_1+u_2)}{\overset{2}{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right](u_1+u_2)}=\frac{\mu}{\mu_1\mu_\varkappa\mu_\lambda}\left\{\frac{\sqrt{x_2\,.\,1-\mu^2x_2\,.\,1-x_1\,.\,1-\varkappa^2x_1\,.\,1-\lambda^2x_1}-\sqrt{x_1\,.\,1-\mu^2x_1\,.\,1-x_2\,.\,1-\varkappa^2x_2\,.\,1-\lambda^2x_2}}{x_2-x_1}\right\}^2$$

10. $$\frac{\overset{2}{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right](u_1+u_2)}{\overset{2}{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right](u_1+u_2)}=\frac{\lambda\mu}{\lambda_1\mu_1\lambda_\varkappa\mu_\varkappa}\left\{\frac{\sqrt{1-\lambda^2x_2\,.\,1-\mu^2x_2\,.\,x_1\,.\,1-x_1\,.\,1-\varkappa^2x_1}-\sqrt{1-\lambda^2x_1\,.\,1-\mu^2x_1\,.\,x_2\,.\,1-x_2\,.\,1-\varkappa^2x_2}}{x_2-x_1}\right\}^2$$

11. $$\frac{\overset{2}{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right](u_1+u_2)}{\overset{2}{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right](u_1+u_2)}=\frac{\varkappa\mu}{\varkappa_1\mu_1\lambda_\varkappa\mu_\lambda}\left\{\frac{\sqrt{1-\varkappa^2x_2\,.\,1-\mu^2x_2\,.\,x_1\,.\,1-x_1\,.\,1-\lambda^2x_1}-\sqrt{1-\varkappa^2x_1\,.\,1-\mu^2x_1\,.\,x_2\,.\,1-x_2\,.\,1-\lambda^2x_2}}{x_2-x_1}\right\}^2$$

12. $$\frac{\overset{2}{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}\right](u_1+u_2)}{\overset{2}{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right](u_1+u_2)}=\frac{\varkappa\lambda}{\varkappa_1\lambda_1\mu_\varkappa\mu_\lambda}\left\{\frac{\sqrt{1-\varkappa^2x_2\,.\,1-\lambda^2x_2\,.\,x_1\,.\,1-x_1\,.\,1-\mu^2x_1}-\sqrt{1-\varkappa^2x_1\,.\,1-\lambda^2x_1\,.\,x_2\,.\,1-x_2\,.\,1-\mu^2x_2}}{x_2-x_1}\right\}^2$$

13. $$\frac{\overset{2}{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right](u_1+u_2)}{\overset{2}{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right](u_1+u_2)}=\frac{\mu}{\varkappa_1\lambda_1\mu_\varkappa\mu_\lambda}\left\{\frac{\sqrt{1-x_2\,.\,1-\mu^2x_2\,.\,x_1\,.\,1-\varkappa^2x_1\,.\,1-\lambda^2x_1}-\sqrt{1-x_1\,.\,1-\mu^2x_1\,.\,x_2\,.\,1-\varkappa^2x_2\,.\,1-\lambda^2x_2}}{x_2-x_1}\right\}^2$$

4. $$\frac{\overset{2}{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right](u_1+u_2)}{\overset{2}{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right](u_1+u_2)}=\frac{\lambda}{\varkappa_1\mu_1\lambda_\varkappa\mu_\lambda}\left\{\frac{\sqrt{1-x_2\,.\,1-\lambda^2x_2\,.\,x_1\,.\,1-\varkappa^2x_1\,.\,1-\mu^2x_1}-\sqrt{1-x_1\,.\,1-\lambda^2x_1\,.\,x_2\,.\,1-\varkappa^2x_2\,.\,1-\mu^2x_2}}{x_2-x_1}\right\}^2$$

15. $$\frac{\overset{2}{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right](u_1+u_2)}{\overset{2}{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right](u_1+u_2)}=\frac{\varkappa}{\lambda_1\mu_1\lambda_\varkappa\mu_\varkappa}\left\{\frac{\sqrt{1-x_2\,.\,1-\varkappa^2x_2\,.\,x_1\,.\,1-\lambda^2x_1\,.\,1-\mu^2x_1}-\sqrt{1-x_1\,.\,1-\varkappa^2x_1\,.\,x_2\,.\,1-\lambda^2x_2\,.\,1-\mu^2x_2}}{x_2-x_1}\right\}^2$$

16. . . . . . . $$\frac{\partial}{\partial u_1}\lg\overset{2}{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right](u_1)-\frac{C_1'\sqrt{X_1}}{x_1(1-x_1)(B_1C_1'-B_1'C_1)}=\frac{\partial}{\partial u_1}\lg\overset{2}{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right](u_1);$$

7. . . . . . . $$\frac{\partial}{\partial u_1'}\lg\overset{2}{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right](u_1)+\frac{C_1\sqrt{X_1}}{x_1(1-x_1)(B_1C_1'-B_1'C_1)}=\frac{\partial}{\partial u_1'}\lg\overset{2}{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right](u_1);$$

8. . . . . . . $$\frac{\partial}{\partial u_1}\lg\overset{2}{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right](u_1)-\frac{C_1'\sqrt{X_1}}{x_1(1-\varkappa^2x_1)(B_1C_1'-B_1'C_1)}=\frac{\partial}{\partial u_1}\lg\overset{2}{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right](u_1);$$

9. . . . . . . $$\frac{\partial}{\partial u_1'}\lg\overset{2}{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right](u_1)+\frac{C_1\sqrt{X_1}}{x_1(1-\varkappa^2x_1)(B_1C_1'-B_1'C_1)}=\frac{\partial}{\partial u_1'}\lg\overset{2}{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right](u_1);$$

0. . . . . . . $$\frac{\partial}{\partial u_1}\lg\overset{2}{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right](u_1)-\frac{C_1'\sqrt{X_1}}{x_1(1-\lambda^2x_1)(B_1C_1'-B_1'C_1)}=\frac{\partial}{\partial u_1}\lg\overset{2}{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right](u_1);$$

1. . . . . . . $$\frac{\partial}{\partial u_1'}\lg\overset{2}{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right](u_1)+\frac{C_1\sqrt{X_1}}{x_1(1-\lambda^2x_1)(B_1C_1'-B_1'C_1)}=\frac{\partial}{\partial u_1'}\lg\overset{2}{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right](u_1);$$

2. . . . . . . $$\frac{\partial}{\partial u_1}\lg\overset{2}{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right](u_1)-\frac{C_1'\sqrt{X_1}}{x_1(1-\mu^2x_1)(B_1C_1'-B_1'C_1)}=\frac{\partial}{\partial u_1}\lg\overset{2}{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right](u_1);$$

3. . . . . . . $$\frac{\partial}{\partial u_1'}\lg\overset{2}{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right](u_1)+\frac{C_1\sqrt{X_1}}{x_1(1-\mu^2x_1)(B_1C_1'-B_1'C_1)}=\frac{\partial}{\partial u_1'}\lg\overset{2}{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right](u_1).$$

VITA.

Ego, Ernestus Adolphus Germanus Ohnesorge, fidei evangelicae addictus, Wrizenii in oppido Brandenburgensi ad Viadrum sito anno MDCCCLV pr. Kal. Sext. patre Ernesto, matre Guilelma ex gente Klauke natus sum. Primis literarum initiis in schola, quam vocant progymnasium reale, imbutus, veni Berolinum et in primam classem gymnasii realis, quod dicitur Koenigstadt, directore ill. Wenzlaff receptus sum. Anno LXXVI maturitatis testimonio instructus primo Berolini per quinque semestria legentes audivi viros illustrissimos: Braun, Bruns, Dove, du Bois-Reymond, Harms, Helmholtz, Kirchhoff, Kny, Kummer, Wangerin, Weierstrass, tum Halis per duo semestria a viris doctissimis: Cantor, Haym, Heine, Fritsch, Oberbeck institutus sum. Quibus viris omnibus maxime de me meritis summam, quam possum, gratiam habeo semperque habebo.

Mense Januario a. LXXXI Halis examen pro facultate docendi sustinui, tum ad gymnasium reale, quod rectore ill. Martus floret, transii ubi etiam nunc versor.

THESEN.

I.

Das Verdienst, zuerst die Theorie der conformen Abbildungen begründet zu haben, gebührt Lagrange.

II.

Vom praktischen wie vom paedagogischen Standpunkt aus ist es wünschenswerth, die Elemente der Infinitesimalrechnung in das Pensum unserer Realgymnasien aufzunehmen.

III.

Eine Beschränkung der Anstellungsfähigkeit der im mathematisch-naturwissenschaftlichen Fache pro facultate docendi geprüften Real-Abiturienten ist durchaus unzulässig.

Ueber

die Beziehung des Riemann'schen Integrals zweiter Gattung

zu den

Periodicitätsmoduln der Function $R(o \mid \varepsilon)$.

Inauguraldissertation,

der

mathematischen und naturwissenschaftlichen Facultät

der

Kaiser-Wilhelms-Universität Strassburg

zur Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt von

Otto PAULS

aus Montjoie.

Strassburg,

Buchdruckerei R. Schultz und Comp.

1882.

Ueber die

Beziehung des Riemann'schen Integrals zweiter Gattung

zu den Periodicitätsmoduln der Function $R(o|\varepsilon)$.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich zunächst mit den Vereinfachungen, welche sich für die Darstellung des RIEMANN'schen Integrals zweiter Gattung und seine Anwendungen ergeben, wenn man der Herleitung dieser Function nicht, wie früher üblich, das Integral dritter Gattung, sondern die von Herrn Professor CHRISTOFFEL eingeführte Function R (*) zu Grunde legt.

Das bekannte Verfahren der Integration über das Querschnittsystem der RIEMANN'schen Fläche T liefert bei passender Wahl der in dem Integral zweiter Gattung $t\,(o\,|\,\varepsilon)$ enthaltenen additiven Constante die Formel:

$$t\,(o|\varepsilon)=\psi(\varepsilon|o)-\frac{1}{\pi i}\sum_{\mu=1}^{p}u'_{\mu}(\varepsilon)\mathfrak{A}_{\mu}(o);$$

wo 1) ψ rationale Function der Coordinaten z, s des variabeln Punktes o und der Coordinaten ζ, σ des Unstetigkeitspunktes ε ist; 2) $u'_{\mu}(\varepsilon)$ ist der μte Normalintegrand erster Gattung für den Punkt ε, und, wenn o durch ε ersetzt wird, sind $\mathfrak{A}_1(\varepsilon)$, $\mathfrak{A}_2(\varepsilon),\ldots.\mathfrak{A}_p(\varepsilon)$ die Periodicitätsmoduln der Function $R(o|\varepsilon)$ für die Querschnitte $a_1\ a_2\ldots a_p$.

Von dem rein algebraischen Gliede $\psi(\varepsilon|o)$ abgesehen, sind also in diesem Ausdruck der Function $t(o\,|\,\varepsilon)$ die Variablen z, ζ von einander getrennt, in der Weise, dass die einzigen transsccendenten Functionen $\mathfrak{A}_1(o)$, $\mathfrak{A}_2(o)$; .... $\mathfrak{A}_p(o)$, welche in unsern Ausdruck eingehen, von ζ unabhängig, also für alle Lagen des Punktes ε die nämlichen sind.

(*) Siehe unten § 1, und *Annali di Matematica,* Serie II^a, Band IX, Seite 97—99.

Auf diesem Umstande beruht die Brauchbarkeit der vorstehenden Formel. So wird durch dieselbe der RIEMANN'sche Ausdruck

$$S = C_0 + C_1 t(o|\varepsilon_1) + C_2 t(o|\varepsilon_2) + \dots .$$

einer algebraischen, wie die Fläche T verzweigten Function S von z aus der transscendenten in die rein algebraische Form

$$S = C_0 + C_1 \psi(\varepsilon_1|o) + C_2 \psi(\varepsilon_2\, o) + \dots .$$

(§ 7) übergeführt.

Damit ist eine neue Ausdrucksform für diese Functionen S gefunden, nebst dem Satze, dass p Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten von S ausreichen, damit dieser Ausdruck in den n unendlich fernen Punkten von T stetig bleibt, während dort jedes einzelne Glied unendlich zur Ordnung $m-1$ wird. Als Beispiel hierzu wird für die bekannte Function S von der Ordnung $p+1$ der vollständige Ausdruck nebst den Bedingungen für die Existenz dieser Function hergeleitet.

Für das volle Verständniss der obigen Formel, durch welche die transscendente Function $t(o|\varepsilon)$ von z auf die vom Parameter ζ unabhängigen Transscendenten $\mathfrak{A}_\mu(o)$ zurückgeführt wird, ist es notwendig, diese neuen Transscendenten auf ihre charakteristischen Eigenschaften zu untersuchen.

Mit dieser Untersuchung beschäftige ich mich im zweiten Theile der Arbeit. Es findet sich, dass innerhalb der einfach zusammenhängenden Fläche T' diese Function $\mathfrak{A}_\mu(o)$ einwertig ist und nur im Unendlichen unstetig wird: in jedem unendlich fernen Punkte wird sie ∞^{m-1} ohne logarithmische Unstetigkeit. Ausserdem ist sie stetig an allen Querschnitten mit Ausnahme des Querschnittes b_μ, wo sie den Periodicitätsmodul $-2\pi i$ hat. Daraus folgt, dass die Derivirte von $\mathfrak{A}_\mu$ eine algebraische, wie die Fläche T verzweigte Function von z ist, was sich an dem Ausdruck von $\mathfrak{A}_\mu(o)$ als bestimmtes Integral nicht unmittelbar zu erkennen gibt.

Diese Resultate übertragen sich sofort auf die Functionen $\mathfrak{B}_1(o), \mathfrak{B}_2(o), \dots . \mathfrak{B}_p(o)$ von z, welche den übrigen Periodicitätsmoduln von R entsprechen. Dies führt zur Einsicht, dass in beiden Fällen die charakteristischen Eigenschaften einer ganzen Classe von Functionen $\mathfrak{C}$ vorliegen, welche entstehen, wenn das $\int dR(o|\varepsilon)$ in der ursprünglichen Fläche T über einen beliebigen Ringweg r erstreckt wird.

Zu dieser Classe gehören zunächst die Functionen $\mathfrak{B}_1(o), \mathfrak{B}_2(o), \dots . \mathfrak{B}_p(o)$ und, wenn ihr Vorzeichen geändert wird, auch die Functionen $\mathfrak{A}_1(o), \mathfrak{A}_2(o), \dots . \mathfrak{A}_p(o)$. Diese $2p$ Functionen sind linear unabhängig, was aus ihrer Einwertigkeit in der Fläche T' nebst den Werten ihrer Periodicitätsmoduln folgt. Durch sie lassen sich alle übrigen Functionen $\mathfrak{C}(o)$ linear ausdrücken. Die Herstellung dieser Beziehung und die Aufklärung eines auffallenden scheinbaren Widerspruchs, den dieselbe darbietet, bildet den Schluss meiner Arbeit. —

Die obige Formel für die Function $t(o|s)$ steht in naher Beziehung zu einem Ausdruck, der sich bereits in dem Werke von CLEBSCH und Herrn GORDAN (*) findet, nämlich zu der auf Seite 120 stehenden Formel

$$(11)\ \int_{\alpha}^{\beta} dZ_{\xi} = -\left(\frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial x}\right)_{\xi} + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{h=1}^{p} \overset{(h)}{S_{\alpha\beta}} \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}\right)_{\xi}.$$

Die linke Seite dieser Formel, nämlich das

$$\int_{\alpha}^{\beta} dZ_{\xi} = \int_{\alpha}^{\beta} d\left(\frac{\partial \Pi_{\xi\zeta}}{\partial \xi}\right)$$

würde in unserer Schreibweise als eine Differenz,

$$t(\beta|\xi) - t(\alpha|\xi),$$

zu bezeichnen sein, während $\overset{(h)}{S_{\alpha\beta}}$ den h ten Periodicitätsmodul des Integrals $S_{\alpha\beta}$ bedeutet, und dieses letztere bis auf ein additives Integral erster Gattung einer Differenz $R(x|\alpha) - R(x|\beta)$ gleich ist.

Der Uebergang von unserer Formel zur vorstehenden ist demnach klar. Der vollständigen Durchführung der Aufgabe, aus der obigen Formel (11) auch umgekehrt zu einer der unserigen gleichbedeutenden zu gelangen, stehen dagegen beträchtliche Schwierigkeiten im Wege. Es möge darüber folgendes bemerkt sein :

Zunächst ist nicht daran zu denken, dass man, wie auf der linken, so auch auf der rechten Seite dieser Formel die Punkte α, β von einander scheidet, nämlich nicht durch Einmischung eines dritten Punktes ζ, sondern durch wirkliche Zerfällung des algebraischen Ausdrucks für

$$\frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial x}$$

(Seite 20—22 des genannten Werkes) in zwei Theile, so dass der eine nur von x und α, nicht auch noch von β, der andere nur von x und β, nicht auch von α abhängt, und keiner von beiden einen der Aufgabe fremden Punkt ζ enthält. Die genuine Scheidung dieser Punkte α und β wird in einem spätern Abschnitte des genannten Werkes, aber nur für ein Aggregat $T_{\alpha\beta}$ von Integralen dritter Gattung durchgeführt.

Statt dessen könnte man nun, ähnlich, wie im § 3 der vorliegenden Arbeit, zu einer definitiven Normirung von $t(\beta|\xi)$ gelangen, indem man hierfür ein arithmetisches Mittel

$$\frac{1}{\mu}\left\{\int_{\alpha_1}^{\beta} dZ_{\xi} + \int_{\alpha_2}^{\beta} dZ_{\xi} + \ldots + \int_{\alpha_\mu}^{\beta} dZ_{\xi}\right\}$$

(*) CLEBSCH-GORDAN: *Theorie der Abel'schen Functionen.*

einführt, wo aber die Lage der Punkte $\alpha_1 \ldots \alpha_\mu$ sich nicht mit β ändern darf. Eine solche Definition der Function $t(\beta|\xi)$ ist unbedingt zulässig, aber damit nun auch der Ausdruck dieser Function zum Abschluss gebracht wird, müssen die arithmetischen Mittel aus den Werthen von $S_{\alpha\beta}$ und $\overset{(h)}{S}_{\alpha\beta}$, welche in ihm auftreten, ausgerechnet werden, was durchaus davon abhängt, wie man die ganze Zahl μ und die Punkte $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_\mu$ annimmt.

Unser Ausdruck für $t(o|\varepsilon)$ verlangt derartige nachträgliche Ausrechnungen nicht; er ist von der obigen Gleichung (11) durchaus verschieden, da eine Ueberführung der letzteren in eine mit der unsern wirklich äquivalente Formel wegen der Unausführbarkeit der erforderlichen Operationen nicht gelingt.

Strassburg, 14. Februar 1882.

Erste Abtheilung.

Das Normalintegral zweiter Gattung.

§ 1.

Wir bezeichnen in üblicher Weise durch:

$$F(\overset{n}{s}\,|\,\overset{m}{z}) = a\,s^n + a_1\,s^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

eine irreduktible Gleichung zwischen z und s, durch T die zugehörige RIEMANN'sche Fläche, und durch o den veränderlichen Punkt, welcher dem Wertepaar z, s zugeordnet ist. Wo im Folgenden von Punkten ε ε_k o' der Fläche T die Rede ist, sollen die zugehörigen Werthe von z, s stets durch ζ σ; ζ_k σ_k; z' s', bezeichnet werden, falls eine solche Bezeichnung nöthig werden sollte.

In Bezug auf das Polynom F sei vorausgesetzt, dass die in der Aufsuchung der Doppelpunkte von s bestehende Fundamentalaufgabe gelöst ist. Die Anzahl der Doppelpunkte bezeichnen wir mit RIEMANN durch r, es sei in diesen Punkten:

$$z,\ s = \gamma_\rho,\ \delta_\rho \text{ für } \rho = 1, 2, \ldots r;$$

Unterwirft man nun eine ganze Function

$$\Phi_\rho(\overset{n-2}{s}\,|\,\overset{m-2}{z})$$

der Bedingung, dass sie in dem Doppelpunkte γ_ρ, δ_ρ gleich 1, in jedem andern Doppelpunkte gleich Null werden soll, so ergeben sich zwischen den $(m-1)\,(n-1) = p + r$ Coefficienten dieser Function r Gleichungen, welche nach einem bekannten Fundamentalsatze die Auflösung nach mindestens einer Gruppe von r Coefficienten gestatten, so dass noch p Coefficienten willkürlich bleiben. Diese setzen wir der Einfachheit halber gleich Null. Man erhält r solcher Functionen Φ_ρ; mittelst dieser bilde man eine Function

$$\psi(o\,|\,\varepsilon),$$

deren Ausdruck sich aus folgender Formel ergibt

$$\text{1.} \qquad \psi(o\,|\,\varepsilon)\,F'(s\,|\,z) = -\frac{F(s\,|\,\zeta)}{(s-\sigma)(z-\zeta)} - \frac{1}{n}\,\frac{F'(s\,|\,z) - F'(s\,|\,\zeta)}{z-\zeta}$$

$$+ \sum_{\rho=1}^{r}\left[\frac{F(\gamma_\rho\,|\,\zeta)}{(\gamma_\rho-\sigma)(\delta_\rho-\zeta)} - \frac{1}{n}\cdot\frac{F'(\gamma_\rho\,|\,\zeta)}{\delta_\rho-\zeta}\right]\Phi_\rho(s\,|\,z);$$

wo:

$$F'(s\,|\,z) = \frac{\partial F(s\,|\,z)}{\partial s}$$

die partielle Derivirte bedeutet.

Dies ist der vollständig ausgeführte Ausdruck für die in der Einleitung erwähnte Function ψ; die Function R ist ihr Integral:

$$\text{II.} \qquad R(o\,|\,\varepsilon) = \int \psi(o\,|\,\varepsilon)\,dz.$$

In seinen Vorlesungen pflegt Herr Professor CHRISTOFFEL beide Ausdrücke mit entgegengesetztem Zeichen zu benutzen.

Als Function von z wird nun zunächst $\psi(o\,|\,\varepsilon)$ unstetig nur in ε, wo

$$\psi(o\,|\,\varepsilon) = -\frac{1}{z-\zeta} + \text{funct. cont.}$$

ist, und in den Verzweigungspunkten, wo aber ihr Integral stetig bleibt. In jedem unendlich fernen Punkte der Fläche T wird:

$$\psi(o\,|\,\varepsilon) + \frac{1}{nz} = 0^2.$$

Als Function von ζ wird ψ, ausser in o, nur noch in den unendlich fernen Punkten der Fläche T unstetig, dort wird ψ unendlich zur Ordnung $m-1$.

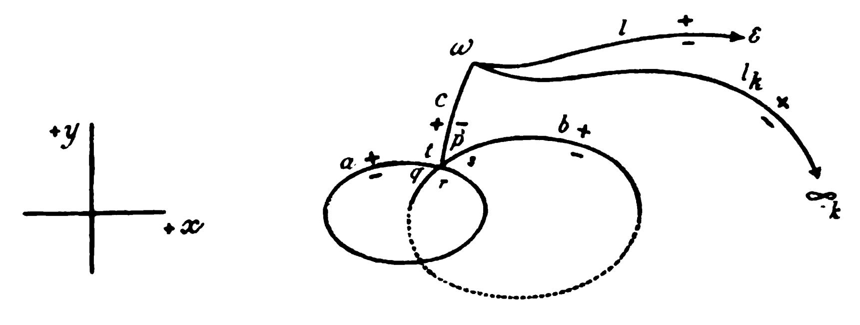
Für die Function $R(o\,|\,\varepsilon)$ von z folgt hieraus, dass sie nur in ε und den unendlich fernen Punkten $\infty_1\ \infty_2 \ldots \infty_n$ der Fläche T unendlich wird, und zwar ist:

$$\text{in } \varepsilon: \quad R(o\,|\,\varepsilon) = -\log(z-\zeta) + \text{funct. cont. mon.}$$

$$\text{in } \infty_1\ \infty_2 \ldots \infty_n: \quad R(o\,|\,\varepsilon) = \frac{1}{n}\log\frac{1}{z} + \text{funct. cont. mon.}$$

Diese Function R ist hiernach einwertig in derjenigen Fläche T'', welche wie folgt entsteht:

Man verwandle T zunächst mittelst der RIEMANN'schen Querschnittbündel c, a, b in eine einfach zusammenhängende Fläche T' und ziehe dann in dieser, um die Fläche T'' zu erhalten, aus dem Punkte ω, von dem die Schnitte c ausgehen, Sperrlinien $l\ l_1\ l_2 \ldots l_n$ nach den Punkten $\varepsilon\ \infty_1\ \infty_2 \ldots \infty_n$



Die Ränder dieser Schnitte werden so bezeichnet, dass ein positiver Umlauf um den Endpunkt von der negativen Seite des betreffenden Schnittes auf die positive Seite führt. Bei den Querschnitten gelte die Bezeichnung RIEMANN's. Wegen der Benennung der fünf Ecken, die sich dort bilden, wo die Schnitte c, a, b zusammentreffen, möge auf vorstehende Figur verwiesen werden.

Wenn nun die bestimmten Integrale:

III.
$$\int \left| \begin{matrix} s \\ b \\ r \end{matrix} \right|_{\nu} d R(o \mid \varepsilon) = \mathfrak{A}_{\nu}(\varepsilon);$$

$$\int \left| \begin{matrix} q \\ a \\ r \end{matrix} \right|_{\nu} d R(o \mid \varepsilon) = \mathfrak{B}_{\nu}(\varepsilon);$$

gesetzt werden, so folgt, wie an der in der Einleitung angeführten Stelle

1) dass R innerhalb T'' einwertig und von jeder Unstetigkeit frei ist, weil die logarithmischen Unstetigkeiten in der Begrenzung von T'' eintreten;

2) dass

$$\begin{array}{r||c|c|c|c|c} \text{an} & a_{\nu} & b_{\nu} & c_{\nu} & l & l_k \; (k=1,2\ldots n) \\ \overset{+}{R} - \overset{-}{R} = & \mathfrak{A}_{\nu}(\varepsilon) & \mathfrak{B}_{\nu}(\varepsilon) & o & -2\pi i & +\frac{2\pi i}{n} \end{array}$$

ist, während

3) zwischen den Periodicitätsmoduln die Relation:

IV.
$$\pi i \mathfrak{B}_{\mu}(\varepsilon) = \sum_{\lambda=1}^{p} a_{\lambda\mu} \mathfrak{A}_{\lambda}(\varepsilon) - 2\pi i \left[u_{\mu}(\varepsilon) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_{\mu}(\infty_k) \right]$$

besteht.

Weiterhin ergibt sich hieraus, dass:

V.
$$T(o \mid \varepsilon) = \frac{d R(o \mid \varepsilon)}{d \zeta} = \int \frac{d \psi(o \mid \varepsilon)}{d \zeta} dz$$

ein Integral zweiter Gattung im Sinne RIEMANN's ist mit dem Unstetigkeitspunkt ε, und zwar ist:

$$\text{in } \varepsilon: \quad T(o \mid \varepsilon) = \frac{1}{z - \zeta} + \text{funct. cont.}$$

Sonst ist diese Function innerhalb der einfach zusammenhängenden Fläche T' allenthalben stetig und überdies einwertig.

Setzt man:

$$\frac{d \mathfrak{A}_{\nu}(\varepsilon)}{d \zeta} = \mathfrak{A}'_{\nu}(\varepsilon); \qquad \frac{d \mathfrak{B}_{\nu}(\varepsilon)}{d \zeta} = \mathfrak{B}'_{\nu}(\varepsilon),$$

und
$$\frac{d u_{\mu}(o)}{d z} = u'_{\mu}(o),$$

so ist:

$$\text{an } a_\lambda: \quad \overset{+}{T} - \overset{-}{T} = \mathfrak{A}'_\lambda(\varepsilon);$$

$$\text{an } b_\lambda: \quad \overset{+}{T} - \overset{-}{T} = \mathfrak{B}'_\lambda(\varepsilon);$$

weiterhin:

VI.
$$\pi i \,.\, \mathfrak{B}'_\mu(\varepsilon) = \sum_{\lambda=1}^{p} a_{\lambda\mu}\, \mathfrak{A}'_\lambda(\varepsilon) - 2\pi i\, u'_\mu(\varepsilon).$$

§ 2.

Nachdem dies in Erinnerung gebracht ist, bilden wir die Function:

$$P = \int T(o\,|\,\delta)\, dR(o\,|\,\varepsilon) = \int T(o\,|\,\delta)\, \psi(o\,|\,\varepsilon)\, dz.$$

Dieselbe hat logarithmische Unstetigkeiten nur in den Punkten δ, ε und in den n unendlich fernen Punkten von T, und zwar ist das Gewicht der Unstetigkeit

1) im Punkte δ gleich $\psi(\delta\,|\,\varepsilon)$;
2) » » ε » $-T(\varepsilon\,|\,\delta)$;
3) » » ∞_k » $\frac{1}{n} T(\infty_k\,|\,\delta)$; $(k = 1\ 2 \dots n)$.

Das Integral

$$J = \int_{(T')} T(o\,|\,\delta)\, dR(o\,|\,\varepsilon),$$

in positiver Richtung um die Fläche T' erstreckt, ist aber gleich dem Produkt aus $2\pi i$ in die Summe der Gewichte aller logarithmischen Unstetigkeiten von P, also:

$$J = 2\pi i \left\{ \psi(\delta\,|\,\varepsilon) - T(\varepsilon\,|\,\delta) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} T(\infty_k\,|\,\delta) \right\}.$$

Andererseits liefert die Integration über die Querschnitte in bekannter Weise:

$$J = \sum_{\mu=1}^{p} \Big(\mathfrak{A}'_\mu(\delta)\, \mathfrak{B}_\mu(\varepsilon) - \mathfrak{A}_\mu(\varepsilon)\, \mathfrak{B}'_\mu(\delta) \Big),$$

und wir haben demnach die Gleichung:

VII.
$$2\pi i \left\{ \psi(\delta\,|\,\varepsilon) - T(\varepsilon\,|\,\delta) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} T(\infty_k\,|\,\delta) \right\} =$$
$$= \sum_{\mu=1}^{p} \Big(\mathfrak{A}'_\mu(\delta)\, \mathfrak{B}_\mu(\varepsilon) - \mathfrak{A}_\mu(\varepsilon)\, \mathfrak{B}'_\mu(\delta) \Big).$$

§ 3.

Die Formeln IV und VII vereinfachen sich bedeutend, wenn wir von dem Umstande Gebrauch machen, dass sowohl u_μ als T eine additive, von z unabhängige, im Uebrigen verfügbare Grösse enthält.

Um dieses bei u_μ zum Ausdruck zu bringen, werde gesetzt:

$$u_\mu(o) = \int_\alpha^o du_\mu - c_\mu,$$

wo α irgend ein Punkt von T sein soll. Dann wird die in IV vorkommende Summe:

$$\frac{1}{n}\sum_k u_\mu(\infty_k) = \frac{1}{n}\sum_k \int_\alpha^{\infty_k} du_\mu - c_\mu.$$

Die Constante c_μ bestimmen wir so, dass:

$$\sum_{k=1}^{n} u_\mu(\infty_k) = 0$$

wird, also:

$$c_\mu = \frac{1}{n}\sum_k \int_\alpha^{\infty_k} du_\mu$$

und demnach:

$$\text{(A)} \qquad u_\mu(o) = \int_\alpha^o du_\mu - \frac{1}{n}\sum_k \int_\alpha^{\infty_k} du_\mu.$$

Ebenso verfahren wir bei $T(o|\varepsilon)$ und setzen:

$$\text{(B)} \qquad T(o|\varepsilon) = \int_\alpha^o d\,T(o|\varepsilon) - \frac{1}{n}\sum_k \int_\alpha^{\infty_k} d\,T(o|\varepsilon).$$

Bei $T(o|\varepsilon)$ ist nun also, genau wie bei u_μ die additive Constante in der Weise bestimmt, dass die Summe der n Werte, welche die Function für $z = \infty$ erlangt, Null ist.

Es ist ausdrücklich hervorzuheben, dass diese Bestimmung der Constanten auf die Periodicitätsmoduln von u_μ und $T(o|\varepsilon)$ keinen Einfluss hat.

Unter diesen Festsetzungen geht die Gleichung IV über in die folgende:

$$\text{(C)} \qquad \pi i\, \mathfrak{P}_\mu(\varepsilon) = -2\pi i \,.\, u_\mu(\varepsilon) + \sum_\lambda a_{\lambda\mu} \mathfrak{A}_\lambda(\varepsilon);$$

Gleichung VII verwandelt sich in:

$$2\pi i\left[\psi(\delta|\varepsilon) - T(\varepsilon|\delta)\right] = \sum_\mu \begin{vmatrix} \mathfrak{A}'_\mu(\delta) & \mathfrak{P}'_\mu(\delta) \\ \mathfrak{A}_\mu(\varepsilon) & \mathfrak{P}_\mu(\varepsilon) \end{vmatrix}.$$

Zur weiteren Vereinfachung benutzen wir rechts die Werte:

$$\mathfrak{P}'_\mu(\delta) = -2u'_\mu(\delta) + \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda a_{\lambda\mu} \mathfrak{A}'_\lambda(\delta),$$

$$\mathfrak{P}_\mu(\varepsilon) = -2u_\mu(\varepsilon) + \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda a_{\lambda\mu} \mathfrak{A}_\lambda(\varepsilon),$$

welche sich aus (C) ergeben, so dass die Summe in die beiden Glieder:

$$-2\sum_\mu \begin{vmatrix} \mathfrak{A}'_\mu(\delta)\, u'_\mu(\delta) \\ \mathfrak{A}_\mu(\varepsilon)\, u_\mu(\varepsilon) \end{vmatrix} \text{ und } \frac{1}{\pi i}\sum_\mu\sum_\lambda a_{\lambda\mu} \begin{vmatrix} \mathfrak{A}'_\mu(\delta)\, \mathfrak{A}'_\lambda(\delta) \\ \mathfrak{A}_\mu(\varepsilon)\, \mathfrak{A}_\lambda(\varepsilon) \end{vmatrix}$$

zerfällt. Die Doppelsumme ist aber gleich Null, denn, wenn man λ mit μ vertauscht, ändert jedes Glied der Summe nur sein Vorzeichen, während der Wert der vollständigen Summe ungeändert bleibt, da λ und μ bei der Summation dieselben Werte durchlaufen.

Es folgt:

$$2\pi i\Big[\psi(\delta \,\varepsilon) - T(\varepsilon\,|\,\delta)\Big] = -2\sum_\mu \begin{vmatrix} \mathfrak{A}'_\mu(\delta)\, u'_\mu(\delta) \\ \mathfrak{A}_\mu(\varepsilon)\, u_\mu(\varepsilon) \end{vmatrix};$$

also auch:

$$\psi(\delta\,|\,\varepsilon) - \frac{1}{\pi i}\sum_\mu u'_\mu(\delta)\,\mathfrak{A}_\mu(\varepsilon) = T(\varepsilon\,|\,\delta) - \frac{1}{\pi i}\sum_\mu \mathfrak{A}'_\mu(\delta)\, u_\mu(\varepsilon).$$

§ 4.

Mit Rücksicht auf die vorstehende Formel setzen wir nunmehr:

$$(1) \qquad t(o\,|\,\varepsilon) = T(o\,|\,\varepsilon) - \frac{1}{\pi i}\sum_\mu \mathfrak{A}'_\mu(\varepsilon)\, u_\mu(o);$$

dann geht diese Formel über in:

$$\psi(\delta\,|\,\varepsilon) - \frac{1}{\pi i}\sum_\mu u'_\mu(\delta)\,\mathfrak{A}_\mu(\varepsilon) = t(\varepsilon\,|\,\delta);$$

somit folgt auch, wenn ε durch o und hierauf δ durch ε ersetzt wird:

$$(2) \qquad t(o\,|\,\varepsilon) = \psi(\varepsilon\,|\,o) - \frac{1}{\pi i}\sum_\mu u'_\mu(\varepsilon)\,\mathfrak{A}_\mu(o).$$

Als Function von z hat $t(o\,|\,\varepsilon)$ wegen der Gleichung (1) die folgenden Eigenschaften:

1) In der einfach zusammenhängenden Fläche T' ist $t(o\,|\,\varepsilon)$ einwertig und bis auf den Punkt ε allenthalben stetig; in ε ist:

$$t(o\,|\,\varepsilon) = \frac{1}{z-\zeta} + \text{funct. cont.}$$

2) Die Summe der n Werte, welche die Function in den n unendlich fernen Punkten der Fläche T' erlangt, ist gleich Null.

3) An den Querschnitten hat die Function $t(o\,|\,\varepsilon)$ constante Periodicitätsmoduln, und zwar ist mit Rücksicht auf VI (§ 1) und die Periodicitätsmoduln von u_μ:

$$\text{an } a_\lambda: \quad \overset{+}{t} - \overset{-}{t} = o;$$

$$\text{an } b_\lambda: \quad \overset{+}{t} - \overset{-}{t} = -2u'_\lambda(\varepsilon).$$

Also ist $t(o|\mathfrak{s})$ als Function von z das Normalintegral zweiter Gattung für den Unstetigkeitspunkt $\mathfrak{s}$, wobei jedoch darauf zu achten ist, dass hier auch noch über die additive Constante verfügt ist, welche bei der RIEMANN'schen Definition des Normalintegrals zweiter Gattung disponibel bleibt. Aus diesem Grunde dürfte es angebracht sein, zu zeigen, wie sich unsere Function $t(o|\mathfrak{s})$ mit Hülfe der RIEMANN'schen ϑ-function ausdrückt.

§ 5.

Zu dem Ende gehen wir aus vom Integral:

$$P = \int R(o|\mathfrak{z})\, d \log \vartheta\Big((u_\mu(o) - e_\mu)\Big);$$

wo:

$$e_\mu = \sum_{k=1}^{p} u_\mu(\mathfrak{s}_k) - K_\mu;$$

und:

$$K_\mu = \frac{1}{2}\Big[\pi i + a_{\mu\mu}\Big] + \frac{1}{\pi i}\sum_{\lambda \neq \mu} \int \left|\begin{matrix} s \\ b \\ r \end{matrix}\right|_\lambda \overset{+}{u}_\mu \, d u_\lambda$$

ist. Die Punkte $\mathfrak{s}_1\, \mathfrak{s}_2 \ldots . \mathfrak{s}_p$ setzen wir unbeschränkt variabel voraus, so dass, wenn man will, für ϑ der Ausdruck durch die unendliche Reihe RIEMANN's benutzt werden kann.

Die angewandte ϑ-function wird Null in den p Punkten $\mathfrak{s}$, jedes Mal zur ersten Ordnung.

An den Querschnitten ist:

$$\text{an } a_\lambda: \quad \overset{+}{\vartheta} = \overset{-}{\vartheta};$$

$$\text{an } b_\lambda: \quad \overset{+}{\vartheta} = \overset{-}{\vartheta} . e^{-a_{\lambda\lambda} - 2(\overset{-}{u}_\lambda - e_\lambda)};$$

also

$$\text{an } a_\lambda: \quad \log \overset{+}{\vartheta} = \log \overset{-}{\vartheta} - 2 h_\lambda \pi i;$$

$$\text{an } b_\lambda: \quad \log \overset{+}{\vartheta} = \log \overset{-}{\vartheta} - a_{\lambda\lambda} - 2(\overset{-}{u}_\lambda - e_\lambda) + 2 g_\lambda \pi i;$$

g_λ und h_λ sind hier ganze Zahlen.

Innerhalb der Fläche T'' wird das Integral P unstetig nur in den Nullpunkten der ϑ-function, den Punkten $\mathfrak{s}_1\, \mathfrak{s}_2 \ldots . \mathfrak{s}_p$, da $R(o|\mathfrak{z})$ innerhalb T'' stetig ist. In dem Punkte $\mathfrak{s}_k$ wird P logarithmisch unstetig, und das Gewicht dieser Unstetigkeit ist gleich $R(\mathfrak{s}_k|\mathfrak{z})$.

Das positiv um die Fläche T'' erstreckte Integral:

$$J = \int_{(T'')} R(o|\mathfrak{z})\, d \log \vartheta,$$

welches gleich ist dem Produkte aus $2\pi i$ in die Summe der Gewichte aller logarithmischen Unstetigkeiten von P innerhalb T'', findet sich also gleich:

$$J = 2\pi i . \sum_{k=1}^{p} R(\varepsilon_k \mid \delta).$$

Die Integration über die Querschnitte liefert:

$$J = \sum_{\lambda} \mathfrak{A}_\lambda(\delta) . \left\{ - a_{\lambda\lambda} - 2 u_\lambda(r_\lambda) + 2 e_\lambda + 2 g_\lambda \pi i \right\}$$

$$+ \sum_{\lambda} \left\{ \mathfrak{B}_\lambda(\delta) 2 h_\lambda \pi i + 2 \int \left| \begin{matrix} s \\ b \\ r \end{matrix} \right|_{\lambda}^{+} R(o \mid \delta) \, d u_\lambda(o) \right\}$$

$$- 2\pi i \log \vartheta\Big((u_\mu(\delta) - e_\mu) \Big) + \frac{2\pi i}{n} \sum_{g=1}^{n} \log \vartheta\Big((u_\mu(\infty_g) - e_\mu) \Big).$$

Setzt man beide Ausdrücke für J einander gleich, hebt mit $2\pi i$ weg und differentiirt nach ζ_k, dem Werte von z in ε_k, so ergibt sich mit Rücksicht darauf, dass

$$\frac{d e_\lambda}{d \zeta_k} = u'_\lambda(\varepsilon_k)$$

ist, die folgende Relation:

$$\psi(\varepsilon_k \mid \delta) - \frac{1}{\pi i} \sum_{\lambda} \mathfrak{A}_\lambda(\delta) \, u'_\lambda(\varepsilon_k) =$$

$$= - \frac{d}{d\zeta_k} \log \vartheta\Big((u_\mu(\delta) - e_\mu) \Big) + \frac{1}{n} . \frac{d}{d\zeta_k} \sum_{g=1}^{n} \log \vartheta\Big((u_\mu(\infty_g) - e_\mu) \Big).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist nach Gleichung (2) des vorangehenden Abschnitts gleich $t(\delta \mid \varepsilon_k)$; ersetzt man δ durch o, so folgt:

$$t(o \mid \varepsilon_k) = \frac{1}{n} \frac{d}{d\zeta_k} \log \frac{\prod_{g=1}^{n} \vartheta\Big((u_\mu(\infty_g) - e_\mu) \Big)}{\Big[\vartheta\Big((u_\mu(o) - e_\mu) \Big) \Big]^n}.$$

Dieser Ausdruck hängt also ausser von der Lage des Punktes ε_k auch von der Lage der übrigen Punkte ε ab. Wir bilden nun $t(o \mid \varepsilon_k)$ für $k = 1, 2 \ldots p$ und addiren. Alsdann lassen wir die p Punkte ε_k in einem, wie o unbeschränkt veränderlichen Punkte ε zusammenfallen, wobei sämmtliche $t(o \mid \varepsilon_k)$ in $t(o \mid \varepsilon)$ übergehen, und

$$e_\mu = p . u_\mu(\varepsilon) - K_\mu$$

wird; es folgt:

$$p . t(o \mid \varepsilon) = \frac{1}{n} \frac{d}{d\zeta} \log \frac{\prod_{g=1}^{n} \vartheta\Big((u_\mu(\infty_g) - p\, u_\mu(\varepsilon) + K_\mu) \Big)}{\Big[\vartheta\Big((u_\mu(o) - p\, u_\mu(\varepsilon) + K_\mu) \Big) \Big]^n},$$

woraus man den verlangten Ausdruck für $t(o \mid \varepsilon)$ durch Division mit p erhält.

Der Ausdruck für das zum Unstetigkeitspunkt ε gehörige nicht normirte Integral zweiter Gattung (das Normalintegral zweiter Gattung im Sinne RIEMANN's) ist demnach bis auf eine additive von z unabhängige Grösse gleich:

$$-\frac{1}{p}\frac{d}{d\zeta}\log\vartheta\Big((u_\mu(o)-p\,u_\mu(\varepsilon)+K_\mu)\Big).$$

Es ist dies jedoch nicht der von RIEMANN selbst dafür gegebene Ausdruck. Der Ausdruck RIEMANN's (Theorie der ABEL'schen Functionen § 25) (*) lautet in unserer Schreibweise

$$-\frac{1}{p}\frac{d}{d\zeta}\log\vartheta\Big((u_\mu(\varepsilon)-p\,u_\mu(o)+K_\mu)\Big).$$

Seine Richtigkeit beruht auf dem Satze, dass die Nullpunkte, welche

$$\vartheta\Big((u_\mu(\varepsilon)-p\,u_\mu(o)+K_\mu)\Big)$$

als Function von z ausser dem $p$fachen Nullpunkte ε besitzt, von der Lage des Punktes ε unabhängig sind. Denn im entgegengesetzten Falle würden sie sich ändern, wenn man den Logarithmus der ϑ-function nach ζ, dem Werte von z in ε differentiirt, also Unstetigkeitspunkte ergeben, wenn man den RIEMANN'schen Ausdruck als Function von z betrachtet.

Der angeführte Satz lässt sich aus unserer Formel für das definitiv normirte Integral zweiter Gattung herleiten, wenn man in diesem den Punkt ε als variabel ansieht. Als Function von ζ wird nämlich $t(o\,|\,\varepsilon)$ unendlich nur in o und den Verzweigungspunkten. (Vergl. unten § 8.) Hätte nun

$$\vartheta\Big((u_\mu(o)-p\,u_\mu(\varepsilon)+K_\mu)\Big)$$

als Function von ζ ausser o selbst noch irgend einen von z oder o abhängigen Nullpunkt ω, so könnte in dem ϑ-Quotienten, welcher in unserer Formel unter dem log-zeichen steht, ω nicht zugleich Nullpunkt des Zählers sein, da dieser von z unabhängig ist; also wäre ω Unstetigkeitspunkt von t als Function von ζ, während dies ausser o nur feste Unstetigkeitspunkte hat. Also wird, als Function von ζ betrachtet,

$$\vartheta\Big((u_\mu(o)-p\,u_\mu(\varepsilon)+K_\mu)\Big)$$

$=o^p$ in o und ausserdem $=o^1$ nur noch in (p^2-p) Punkten E, die für alle Lagen des Punktes o die nämlichen sind.

Der von RIEMANN benutzte Ausdruck

$$\vartheta\Big((u_\mu(\varepsilon)-p\,u_\mu(o)+K_\mu)\Big),$$

(*) In den gesammelten Werken RIEMANN's finden sich an der angegebenen Stelle zwei Druckfehler.

als Function von z betrachtet, wird also $= o^p$ in ε und ausserdem nur noch Null in den nämlichen, festen Punkten E, wie jener.

§ 6.

Wir haben nun für das vollständig normirte Integral zweiter Gattung die folgenden beiden Ausdrücke:

$$(1) \qquad t(o|\varepsilon) = \psi(\varepsilon|o) - \frac{1}{\pi i}\sum_{\mu} u'_{\mu}(\varepsilon)\,\mathfrak{A}_{\mu}(o);$$

$$(2) \qquad t(o|\varepsilon) = \frac{1}{np}\frac{d}{d\zeta}\log\frac{\prod_{g=1}^{n}\vartheta\Big(\big(u_{\mu}(\alpha_g) - p\,u_{\mu}(\varepsilon) + K_{\mu}\big)\Big)}{\Big[\vartheta\Big(\big(u_{\mu}(o) - p\,u_{\mu}(\varepsilon) + K_{\mu}\big)\Big)\Big]^n};$$

welche beide die Untersuchung von t sowohl als Function von z, wie als Function von ζ gestatten. Der erste dieser beiden Ausdrücke zeigt nun zunächst, dass das vollständig normirte Integral zweiter Gattung $t(o|\varepsilon)$ algebraische, wie die Fläche T verzweigte Function von ζ ist. Als Function von z ist t Integral einer algebraischen, wie T verzweigten Function. Die erste der vorstehenden Darstellungen scheidet die algebraischen Theile des Ausdrucks vollständig von den transscendenten und zwar in der Weise, dass die einzigen transscendenten Functionen, welche in diesen Ausdruck eingehen, nämlich die p Functionen $\mathfrak{A}_{\mu}(o)$, von der Lage des Unstetigkeitspunktes ε unabhängig sind.

§ 7.

Dieses Resultat fordert zu einer genauen Untersuchung dieser neuen Transscendenten $\mathfrak{A}_{\mu}(o)$ auf. Bevor wir zu diesem Hauptgegenstande der vorliegenden Arbeit übergehen, möge es gestattet sein, zwei Anwendungen der Formel (1) des vorangehenden Abschnitts zu geben.

Die erste Anwendung geht darauf hinaus, an einem einfachen Falle zu zeigen, wie unser Ausdruck für das definitiv normirte Integral $t(o|\varepsilon)$ die direkte Ueberführung der RIEMANN'schen Darstellung (*) einer algebraischen wie T verzweigten Function durch Integrale zweiter Gattung in die rein algebraische Form bewirkt.

Ist S eine algebraische, wie die Fläche T verzweigte Function q ter Ordnung von z, die nur zur ersten Ordnung unendlich wird, und zwar in den Punkten $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots\ldots \varepsilon_q$, und ist C_k das Gewicht ihrer Unstetigkeit im Punkte ε_k, so müssen die Gewichte den bekannten p Bedingungen genügen:

$$(1) \qquad C_1 u'_{\mu}(\varepsilon_1) + C_2 u'_{\mu}(\varepsilon_2) + \ldots\ldots + C_q u'_{\mu}(\varepsilon_q) = o \text{ für } \mu = 1,\ 2 \ldots p,$$

(*) RIEMANN: Theorie der ABEL'schen Functionen § 5.

welche direkt aus der Untersuchung der Function $\int S\,du_\mu$ folgen. Unter Voraussetzung dieser Bedingungen lautet der RIEMANN'sche Ausdruck für S:

$$(2) \qquad S = C_0 + C_1 t(o\,|\,\varepsilon_1) + C_2 t(o\,|\,\varepsilon_2) + \ldots + C_q t(o\,|\,\varepsilon_q),$$

wo C_0 eine neue Constante ist.

Benutzt man hier für t die erstere von unseren beiden Darstellungen, so wird wegen (1) der Faktor von $\mathfrak{A}_\mu(\varepsilon)$ Null, also ergibt sich sofort:

$$(3) \qquad S = C_0 + C_1 \psi(\varepsilon_1\,|\,o) + C_2 \psi(\varepsilon_2\,|\,o) + \ldots + C_q \psi(\varepsilon_q\,|\,o),$$

womit die Ueberführung aus der transcendenten in die rein algebraische Form geleistet ist.

Würde man die Darstellung von S umgekehrt auf die Formel (3) gründen, so wären die verlangten Unstetigkeitspunkte im Endlichen alle vorhanden, da $\psi(\varepsilon\,|\,o)$ als Function von z dort nur in ε unstetig und zwar gleich

$$\frac{1}{z-\zeta} + \text{funct. cont.}$$

wird. Aber in jedem unendlich fernen Punkte der Fläche T wird $\psi(\varepsilon\,|\,o)$ als Function von z unendlich zur Ordnung $m-1$ (§ 1.); soll der Ausdruck (3) von S von diesen Unstetigkeiten befreit werden, so gibt dies

$$n(m-1) = p + r + m - 1$$

Bedingungsgleichungen. Aber darunter müssen mindestens $r+m-1$ überzählige Gleichungen sein, denn die vorangehende Untersuchung beweist, dass das nämliche bereits durch die Gleichungen (1) erzwungen wird, deren Anzahl nur gleich p ist.

Wenden wir dieses Resultat auf die Aufgabe an, eine Function S so darzustellen, dass sie von der Ordnung $p+1$ wird, mit den Unstetigkeitspunkten $\varepsilon\, \varepsilon_1\, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$ und dass für den Unstetigkeitspunkt ε ihr Gewicht gleich -1 wird, so ergibt sich:

$$S = C_0 - \frac{D}{\Delta},$$

wo D und Δ die Determinanten:

$$D = \begin{vmatrix} \psi(\varepsilon\,|\,o) & u'_1(\varepsilon) & u'_2(\varepsilon) \ldots\ldots & u'_p(\varepsilon) \\ \psi(\varepsilon_1\,|\,o) & u'_1(\varepsilon_1) & u'_2(\varepsilon_1) \ldots\ldots & u'_p(\varepsilon_1) \\ \psi(\varepsilon_2\,|\,o) & u'_1(\varepsilon_2) & u'_2(\varepsilon_2) \ldots\ldots & u'_p(\varepsilon_2) \\ - & - & - \;\ldots\ldots & - \\ \psi(\varepsilon_p\,|\,o) & u'_1(\varepsilon_p) & u'_2(\varepsilon_p) \ldots\ldots & u'_p(\varepsilon_p) \end{vmatrix}$$

und

$$\Delta = \begin{vmatrix} u'_1(\varepsilon_1) & u'_2(\varepsilon_1) \ldots\ldots\ldots\ldots & u'_p(\varepsilon_1) \\ u'_1(\varepsilon_2) & u'_2(\varepsilon_2) \ldots\ldots\ldots\ldots & u'_p(\varepsilon_2) \\ - & - \;\ldots\ldots\ldots\ldots & - \\ u'_1(\varepsilon_p) & u'_2(\varepsilon_p) \ldots\ldots\ldots\ldots & u'_p(\varepsilon_p) \end{vmatrix}$$

sind.

Hier kann man $u'_1\ u'_2 \ldots u'_p$ durch ein beliebiges System von p linear unabhängigen Integranden erster Gattung $w'_1\ w'_2 \ldots w'_p$ ersetzen, wie man am bequemsten erkennt, wenn man statt der Gleichungen (1) die gleichbedeutenden

$$C w'_\mu(\varepsilon) + C_1 w'_\mu(\varepsilon_1) + \ldots + C_p w'_\mu(\varepsilon_p) = o, \ (\mu = 1, 2 \ldots p)$$

für $C = -1$ benutzt.

Obiger Ausdruck der Function S zeigt, dass die Punkte $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$ in der Fläche T nicht ganz beliebig gewählt werden können; es sind vielmehr für diese Punkte alle diejenigen Lagen auszuschliessen, in denen sie ein Punktsystem erster Gattung bilden, also $\Delta = o$ ist. Wird diese Bedingung durch geeignete Wahl der Punkte ε_1 $\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$ verletzt, so existirt die Function S entweder gar nicht oder doch nicht für alle Lagen des Punktes ε.

§ 8.

Die zweite Anwendung betrifft das definitiv normirte Integral $t(o|\varepsilon)$ als Function von ζ. Wie wir schon oben sahen, ist $t(o|\varepsilon)$ als solche algebraisch und wie die Fläche T verzweigt. Sie wird unendlich nur, wenn $\psi(\varepsilon|o)$ oder eine der Functionen $u'_\mu(\varepsilon)$ es wird, also in dem Punkte o und in den Verzweigungspunkten.

In o wird:

$$\psi(\varepsilon|o) = -\frac{1}{\zeta - z} + \text{funct. cont.}$$

also:

$$t(o|\varepsilon) = -\frac{1}{\zeta - z} + \text{funct. cont.}$$

In den Verzweigungspunkten wird $t(o|\varepsilon)$ als Function von ζ ebenfalls unstetig, aber so, dass ihr Integral dort stetig bleibt.

In jedem unendlich fernen Punkte von T wird als Function von ζ:

$$u'_\mu(\varepsilon) = o^2; \quad \psi(\varepsilon|o) + \frac{1}{n\zeta} = o^2; \quad \text{also ist dort:}$$

$$t(o|\varepsilon) + \frac{1}{n\zeta} = o^2.$$

Aus letzterer Formel folgt, dass $t(o|\varepsilon)$ als Function von ζ in jedem unendlich fernen Punkte verschwindet; also besitzt $t(o|\varepsilon)$ auch als Function von ζ diejenige Eigenschaft, welche wir bei $t(o|\varepsilon)$ als Function von z behufs definitiver Normirung gefordert haben, dass nämlich die Summe der n Werte, welche die Function im Unendlichen erlangt, gleich Null ist.

§ 9.

Wir stellen nun noch zur bequemern Uebersicht die Eigenschaften unseres definitiv normirten Integrals zweiter Gattung als Function von z und als Function von ζ zusammen.

I. Als Function von z ist $t(o|\varepsilon)$ einwertig in der einfach zusammenhängenden Fläche T' und allenthalben stetig mit Ausnahme des Punktes ε.

In ε ist:

$$t(o|\varepsilon) = \frac{1}{z - \zeta} + \text{funct. cont.}$$

An den Querschnitten ist:

$$\text{an } a_\lambda : \overset{+}{t} - \overset{-}{t} = 0,$$

$$\text{an } b_\lambda : \overset{+}{t} - \overset{-}{t} = -2\,u'_\lambda(\varepsilon).$$

Die Summe der n Werte, welche die Function im Unendlichen erlangt, ist gleich Null.

II. Als Function von ζ ist $t(o|\varepsilon)$ algebraisch wie die Fläche T verzweigt. Unstetig wird diese Function nur in den Verzweigungspunkten und im Punkte o.

1) In dem Verzweigungspunkte $\sigma = \alpha$, $\zeta = \beta$ ist:

$$t(o|\varepsilon) = \infty, \text{ aber } \lim\,(\zeta - \beta)\; t(o|\varepsilon) = 0;$$

2) Im Punkte o ist:

$$t(o|\varepsilon) = \frac{1}{z - \zeta} + \text{funct. cont.}$$

In den unendlich fernen Punkten ist:

$$t(o|\varepsilon) + \frac{1}{n\zeta} = 0^2.$$

Zweite Abtheilung.

Die Functionen $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$, $\mathfrak{C}$.

§ 10.

Wir wenden uns nun zur Untersuchung der Function:

$$(1) \qquad \mathfrak{A}_\nu(o) = \int \begin{vmatrix} s \\ b \\ r \end{vmatrix}_\nu \psi(o' \mid o)\, dz',$$

von der die vollständige Aufklärung über die wahre Natur des Integrals zweiter Gattung

$$(2) \qquad t(o \mid \varepsilon) = \psi(\varepsilon \mid o) - \frac{1}{\pi i} \sum_\mu u'_\mu(\varepsilon)\, \mathfrak{A}_\mu(o)$$

abhängt.

Den Ausgangspunkt dieser Untersuchung bildet die Gleichung (2); im weitern Verlauf derselben wird uns dann die Formel (1) selbst volle Einsicht in das Wesen der betrachteten Function verschaffen.

Seien $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$ irgend welche p Punkte der Fläche T, die aber kein Punktsystem erster Gattung bilden dürfen, so dass die Determinante

$$\Delta = \sum \pm u'_1(\varepsilon_1)\, u'_2(\varepsilon_2) \ldots u'_p(\varepsilon_p)$$

von Null verschieden ist.

Nimmt man unter dieser Voraussetzung den Unstetigkeitspunkt ε der Function $t(o \mid \varepsilon)$ nacheinander in diesen p Punkten ε an, so bilden sich gemäss der Formel (2) p Gleichungen, welche die Auflösung nach der Grösse $\mathfrak{A}_\nu$ gestatten.

Man erhält auf diese Weise für die Function $\mathfrak{A}_\nu$ den folgenden Ausdruck:

$$(3) \qquad \mathfrak{A}_\nu(o) = \pi i \sum_{k=1}^{p} \cdot \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial u'_\nu(\varepsilon_k)} \cdot \Big[\psi(\varepsilon_k \mid o) - t(o \mid \varepsilon_k) \Big].$$

Aus dieser Gleichung kann man die Art der Abhängigkeit der Function $\mathfrak{A}_\nu$ von der Lage des Punktes o sehr leicht erkennen. Die Functionen $t(o \mid \varepsilon_k)$ und $\psi(\varepsilon_k \mid o)$ sind, als Functionen von z betrachtet, in der einfach zusammenhängenden Fläche T' einwertig; also ist auch $\mathfrak{A}_\nu(o)$ der Fläche T' einwertig zugeordnet und, wie jene, nur in einzelnen Punkten derselben unstetig.

Was die Unstetigkeiten dieser Function von z betrifft, so folgt: Es haben $\psi(\varepsilon_k \mid o)$ und $t(o \mid \varepsilon_k)$ im Endlichen nur einen Unstetigkeitspunkt, nämlich den Punkt ε_k. In diesem Punkt drücken sich beide aus als

$$\frac{1}{z-\zeta_k} + \text{funct. cont.}$$

Die Differenz beider Functionen ist demnach stetig in ε_k, somit auch $\mathfrak{A}_\nu$, wie sich übrigens von selbst versteht, da $\mathfrak{A}_\nu$ von der Lage dieses Punktes unabhängig ist. Für die Function $\mathfrak{A}_\nu$ folgt daher, dass sie im Endlichen, von den Querschnitten abgesehen, von jeder Unstetigkeit frei ist.

Im Unendlichen bleibt $t(o \mid \varepsilon_k)$ stetig, die algebraische Function $\psi(\varepsilon_k \mid o)$ wird dort auf jedem Blatte $= \infty^{m-1}$, also auch $\mathfrak{A}_\nu(o)$. Diese Unstetigkeiten der verschiedenen Functionen $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_p$ sind in der Weise an einander geknüpft, dass, wie auch immer ein Punkt ε in der Fläche T angenommen werden mag, nach Formel (2) für jeden unendlich fernen Punkt

$$\frac{1}{\pi i}\sum_{\mu=1}^{p} u'_\mu(\varepsilon)\,\mathfrak{A}_\mu(o) = \psi(\varepsilon \mid o) + \text{funct. cont.}$$

wird, wie sich daraus ergibt, dass im Unendlichen

$$t(o \mid \varepsilon) = \text{funct. cont.}$$

ist.

In der einfach zusammenhängenden Fläche T' ist also die Function $\mathfrak{A}_\nu$ einwertig und mit Ausnahme der unendlich fernen Punkte allenthalben stetig. In jedem unendlich fernen Punkte der Fläche wird $\mathfrak{A}_\nu(o)$ zur $(m-1)$ten Ordnung unendlich, und zwar ohne logarithmische Unstetigkeit.

Es bleibt nur noch das Verhalten der Function $\mathfrak{A}_\nu$ an den Querschnitten zu untersuchen. $\psi(\varepsilon_k \mid o)$ hat als algebraische Function von z keine von Null verschiedene Periodicitätsmoduln, wohl aber t. Es ist:

$$\text{an } a_\lambda: \quad \overset{+}{t} - \overset{-}{t} = o; \quad \text{also} \quad \overset{+}{\mathfrak{A}}_\nu - \overset{-}{\mathfrak{A}}_\nu = o;$$

$$\text{an } b_\lambda: \quad \overset{+}{t} - \overset{-}{t} = -2\,u'_\lambda(\varepsilon);$$

also

$$\text{an } b_\lambda: \quad \overset{+}{\mathfrak{A}}_\nu - \overset{-}{\mathfrak{A}}_\nu = \frac{2\pi i}{\Delta}\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial\Delta}{\partial u'_\nu(\varepsilon_k)}\,u'_\lambda(\varepsilon_k) = 2\pi i \binom{\lambda}{\nu};$$

das heisst:

Am Querschnitt b_ν hat $\mathfrak{A}_\nu$ den Periodicitätsmodul $2\pi i$; an allen übrigen Querschnitten ist der Periodicitätsmodul der Function $\mathfrak{A}_\nu$ gleich Null.

§ 11.

Wir wenden uns nun zu der zweiten Gruppe von Periodicitätsmoduln der Function R, den Functionen $\mathfrak{B}_\nu(o)$; es ist:

$$(1) \qquad \mathfrak{B}_\nu(o) = \int \left| \begin{matrix} q \\ a \\ r \end{matrix} \right|_\nu \psi(o' \,|\, o)\, dz'; \quad (\nu = 1, 2 \ldots p).$$

Die Function $\mathfrak{B}_\nu(o)$ ist verknüpft mit den Functionen $\mathfrak{A}$ durch die Gleichung:

$$(2) \qquad \mathfrak{B}_\nu(o) = \frac{1}{2\pi i} \sum_\lambda a_{\lambda\nu} \mathfrak{A}_\lambda(o) - 2 u_\nu(o).$$

Nun ist aber 1) an a_μ:

$$\overset{+}{u}_\nu - \overset{-}{u}_\nu = \binom{\mu}{\nu} \pi i; \quad \overset{+}{\mathfrak{A}}_\lambda - \overset{-}{\mathfrak{A}}_\lambda = o;$$

also

$$\overset{+}{\mathfrak{B}}_\nu - \overset{-}{\mathfrak{B}}_\nu = -2\pi i \binom{\mu}{\nu}.$$

Ferner ist 2) an b_μ:

$$\overset{+}{u}_\nu - \overset{-}{u}_\nu = a_{\mu\nu}; \quad \overset{+}{\mathfrak{A}}_\lambda - \overset{-}{\mathfrak{A}}_\lambda = 2\pi i \binom{\lambda}{\mu};$$

also

$$\overset{+}{\mathfrak{B}}_\nu - \overset{-}{\mathfrak{B}}_\nu = \frac{1}{\pi i} \sum_\lambda a_{\lambda\nu} \binom{\lambda}{\mu} 2\pi i - 2 a_{\mu\nu} = o.$$

Also hat $\mathfrak{B}_\nu(o)$ an dem Querschnitt a_ν den Periodicitätsmodul $-2\pi i$; an jedem andern Querschnitte ist der Periodicitätsmodul gleich Null. Innerhalb der Fläche T' ist $\mathfrak{B}_\nu$ gemäss der Gleichung (2) einwertig und überall mit Ausnahme der unendlich fernen Teile der Fläche T' stetig. In diesen wird $\mathfrak{B}_\nu$ zur $m-1$ ten Ordnung unendlich und zwar ohne logarithmische Unstetigkeit.

§ 12.

Da die Periodicitätsmoduln von $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$ constant sind, so sind die Derivirten

$$\frac{d\mathfrak{A}_\nu}{dz}, \qquad \frac{d\mathfrak{B}_\nu}{dz}$$

dieser Functionen wie die Fläche T verzweigt; dieselben werden unstetig nur in den Verzweigungspunkten und in den unendlich fernen Punkten der Fläche T und zwar zu endlichen Ordnungen; sie sind daher algebraische, wie die Fläche T verzweigte Functionen von z und wir haben so den folgenden Satz:

1) Die $2p$ Integrale

$$\mathfrak{A}_\nu(o) = \int \left|\begin{matrix} s \\ b \\ r \end{matrix}\right|_\nu \psi(o'|o)\,dz'$$

und

$$\mathfrak{B}_\nu(o) = \int \left|\begin{matrix} q \\ a \\ r \end{matrix}\right|_\nu \psi(o'|o)\,dz'$$

sind in der einfach zusammenhängenden Fläche T' einwertig und stetig mit Ausnahme der unendlich fernen Punkte, in denen sie zur $m-1$ ten Ordnung unendlich werden, aber von logarithmischen Unstetigkeiten frei sind.

2) Eine jede dieser Functionen hat nur einen von Null verschiedenen Periodicitätsmodul und zwar hat $\mathfrak{A}_\nu$ den Periodicitätsmodul $2\pi i$ an b_ν; $\mathfrak{B}_\nu$ den Periodicitätsmodul $-2\pi i$ an a_ν;

3) Die Derivirten

$$\frac{d\mathfrak{A}_\nu}{dz}, \qquad \frac{d\mathfrak{B}_\nu}{dz}$$

sind algebraische, wie die Fläche T verzweigte Functionen von z.

Die Art der Verteilung der Periodicitätsmoduln lässt sich in der folgenden Tabelle bequem übersehen.

An	b_1	$b_2 \dots\dots$	b_p	a_1	$a_2 \dots\dots$	a_p
$\overset{+}{\mathfrak{A}}_1 - \overset{-}{\mathfrak{A}}_1 =$	$2\pi i$	$0 \dots\dots$	0	0	$0 \dots$	0
$\overset{+}{\mathfrak{A}}_2 - \overset{-}{\mathfrak{A}}_2 =$	0	$2\pi i \dots\dots$	0	0	$0 \dots$	0
—	—	— —	—	—	— —	—
$\overset{+}{\mathfrak{A}}_p - \overset{-}{\mathfrak{A}}_p$	0	$0 \dots\dots$	$2\pi i$	0	$0 \dots$	0
$\overset{+}{\mathfrak{B}}_1 - \overset{-}{\mathfrak{B}}_1$	0	$0 \dots\dots$	0	$-2\pi i$	$0 \dots$	0
$\overset{+}{\mathfrak{B}}_2 - \overset{-}{\mathfrak{B}}_2$	0	$0 \dots\dots$	0	0	$-2\pi i \dots$	0
—	—	— —	—	—	— —	—
$\overset{+}{\mathfrak{B}}_p - \overset{-}{\mathfrak{B}}_p$	0	$0 \dots\dots$	0	0	$0 \dots$	$-2\pi i$

Dabei ist jetzt hervorzuheben, dass derjenige Querschnitt, an dem eine dieser Functionen den von Null verschiedenen Periodicitätsmodul besitzt, nichts anderes ist, als der Integrationsweg für o' in der obigen Darstellung der Function durch ein **bestimmtes** Integral; zugleich ist darauf zu achten, dass o' auf dem Wege $(raq)_\nu$ den positiven Querschnittrand nicht auf derselben Seite hat, wie auf dem Wege $(rbs)_\nu$. Kehrt man daher beispielsweise bei den Functionen $\mathfrak{A}_\nu$ die Richtungen der Integration

um, so wechselt auch der Periodicitätsmodul sein Zeichen, nimmt also nun denselben Wert an, wie bei den Functionen $\mathfrak{B}$.

§ 13.

Dies führt zur Erkenntniss, dass die $2p$ Functionen $\mathfrak{A}$., $\mathfrak{B}$. nur Spezialfälle sind einer allgemeinen Integralfunction

$$\mathfrak{C}(o) = \int \psi(o' \, o)\, dz',$$

wenn als Integrationsweg ein in sich zurückkehrender, im Uebrigen aber beliebig anzunehmender durch die Fläche T verlaufender Weg r benutzt wird. Wir können dabei den Fall ausschliessen, wo der Weg r die Fläche T in getrennte Stücke zerschneidet, da in diesem Falle das Integral einen constanten und aus den Unstetigkeiten von $\psi(o' \, o)$ als Function von z' leicht zu ermittelnden Wert hat, welcher sich übrigens auch aus dem folgenden ergibt (§ 15).

Bei dem Wege r werde nun zunächst die Integrationsrichtung festgelegt und dann als die positive Seite diejenige bezeichnet, welche zur linken der Integrationsrichtung also so zu derselben liegt, wie die positive $y$axe zur positiven $x$axe. (Figur auf Seite 8.

Hierdurch ist die Function $\mathfrak{C}$ für jede Lage des Punktes o ausserhalb r einwertig festgelegt, und wir beginnen ihre Untersuchung mit dem Nachweis ihres Verhaltens zu beiden Seiten von r.

Nimmt man zu diesem Zwecke

1) o auf der negativen Seite von r an, oder r so, dass dieser Weg in negativer Richtung an o vorbeiführt, alsdann

2) o auf der positiven Seite von r, oder r so an, dass dieser Weg in positiver Richtung an o vorbeiführt, so ist der Ueberschuss des zweiten Integralswertes über den ersten, also $\overset{+}{\mathfrak{C}} - \overset{-}{\mathfrak{C}}$ gleich dem in positiver Richtung um den Punkt o erstreckten Integral. Nun ist in o:

$$\psi(o'|o) = -\frac{1}{z'-z} + \text{funct. cont.};$$

also ist das positiv um o genommene Integral

$$\int \psi(o'|o)\, dz' = -2\pi i;$$

mithin ist an r:

$$\overset{+}{\mathfrak{C}} - \overset{-}{\mathfrak{C}} = -2\pi i.$$

So sehen wir also folgendes: Wird der Punkt o auf die durch den Ringweg r begrenzte Fläche beschränkt, so ist die Function $\mathfrak{C}(o)$ für jede Lage des Punktes o

innerhalb dieser Fläche einwertig bestimmt, und sie hat an ihrem Integrationswege r den Periodicitätsmodul $-2\pi i$.

Von dieser Function $\mathfrak{C}$ sind $\mathfrak{A}_\nu(o)$, $\mathfrak{B}_\nu(o)$ diejenigen besonderen Fälle, welche sich ergeben, wenn man für r den Querschnitt a_ν, b_ν nimmt und dann die Integrationsrichtung dadurch bestimmt, dass man fordert, der positive Querschnittrand solle auf die linke Seite derselben fallen; daraus ergibt sich, dass man, um eine Function $\mathfrak{C}$ zu erhalten, bei den Functionen $\mathfrak{A}_\nu$ die Integrationsrichtung $(r\,b\,s)_\nu$ umzukehren hat, während bei den Functionen $\mathfrak{B}_\nu$ die Richtung $(r\,a\,q)_\nu$ mit der für $\mathfrak{C}$ festgelegten übereinstimmt.

§ 14.

Die weitere Untersuchung der Functionen $\mathfrak{C}$ lässt sich auf den bemerkenswerten Umstand gründen, dass alle diese Functionen sich durch diejenigen $2p$ linear unabhängigen Functionen $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$ ausdrücken lassen, auf welche die Theorie der Functionen R und $t(o|\varepsilon)$ uns geführt hat.

Die Function $R\,(o'|o)$ ist als Function von z' innerhalb der Fläche T'' einwertig. Durchläuft der Punkt o' den Weg r, so hat hiernach die Function R zu Ende denselben Wert, wie zu Anfang; die Summe aller Zunahmen von R auf diesem Wege ist daher gleich Null. Diese Summe setzt sich aber zusammen aus den stetigen und den plötzlichen Zunahmen von R; die Summe der erstern ist nichts anderes, als das bestimmte Integral $\mathfrak{C}$; ist P die Summe der letztern, so folgt:

$$\mathfrak{C}(o)+P=0.$$

Aber diese plötzlichen Zunahmen von R, deren Summe P ist, treten ein, so oft o' einen Querschnitt überschreitet. Also ist für die Berechnung von P auf folgendes zu achten: überschreitet o' einen der Schnitte $a_\mu\ b_\mu\ l\ l_k$, so vermehrt sich R plötzlich um den positiv oder negativ genommenen Periodicitätsmodul, je nachdem der Uebergang über den Schnitt von der negativen zur positiven Seite oder in umgekehrter Richtung erfolgte; für einen dieser Schnitte ist also die Summe aller plötzlichen Zunahmen von R das Produkt aus dem Periodicitätsmodul für den Schnitt und der Differenz $g-h$ zweier positiver ganzer Zahlen, von denen g angibt, wie oft der Schnitt von der negativen zur positiven Seite, h, wie oft er in umgekehrter Richtung überschritten wurde.

Nennen wir diese Differenz $g-h$ die Anzahl der positiven Uebergänge über jenen Schnitt, so dass diese Anzahl auch negativ werden kann; ist in diesem Sinne die Anzahl der positiven Uebergänge

über a_μ gleich α_μ,
» b_μ » β_μ,
» l » λ,
» l_k » λ_k,

so folgt :

$$P = \sum_{\mu=1}^{p} \Big[\alpha_\mu \mathfrak{A}_\mu(o) + \beta_\mu \mathfrak{B}_\mu(o)\Big] + \frac{2\pi i}{n} \cdot \Big[\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n\Big] - 2\pi i \cdot \lambda;$$

also haben wir :

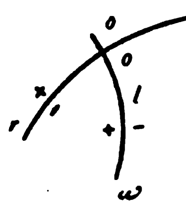
$$(1) \quad \mathfrak{C}(o) + \sum_{\mu=1}^{p} \Big[\alpha_\mu \mathfrak{A}_\mu(o) + \beta_\mu \mathfrak{B}_\mu(o)\Big] + 2\pi i \Big[\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}{n} - \lambda\Big] = 0.$$

Aber diese Formel enthält einen scheinbaren Widerspruch, da jede der Functionen $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$ und $\mathfrak{C}$ nur einen von Null verschiedenen Periodicitätsmodul hat, nämlich an ihrem eigenen Integrationswege, also dort, wo die andern Functionen sämmtlich den Periodicitätsmodul Null haben. Hieraus folgt nämlich, dass eine identische Gleichung:

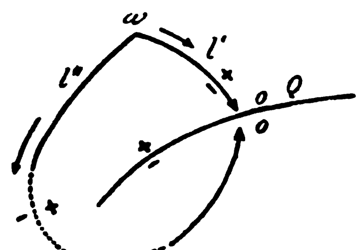
$$\mathfrak{C}(o) + \sum_{\mu} \Big[\alpha_\mu \mathfrak{A}_\mu(o) + \beta_\mu \mathfrak{B}_\mu(o)\Big] + \gamma = 0,$$

in welcher γ und sämmtliche α_μ, β_μ constant sind, unmöglich ist. Die folgende Untersuchung wird dartun, dass und aus welchen Gründen dies der Formel (1) durchaus nicht widerspricht.

Wir nehmen in der Fläche T die Querschnittbündel a, b, c und die Schnitte $l_1\, l_2 \ldots . \, l_n$ nach den n unendlich fernen Punkten, sowie den Ringweg r nebst der Integrationsrichtung fest an. Damit ist dann die Bedeutung der Functionen $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$ und $\mathfrak{C}$ und der Zahlen $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots . \, \alpha_n$; $\beta_1\, \beta_2 \ldots . \, \beta_n$; $\lambda_1\, \lambda_2 \ldots . \, \lambda_n$ ein für allemal, und zwar unabhängig von der Lage des Punktes o festgelegt. Anders verhält es sich mit der Zahl λ, da der Schnitt l, obgleich er von r beliebig oft geschnitten werden kann, über keinen der Schnitte $a\, b\, l_k$ hinweggehen darf. Soll nun o einmal auf der negativen, dann auf der positiven Seite eines Schnittes Q liegen, so sind in Bezug auf die Anlage des vom gemeinsamen Ausgangspunkte ω sämmtlicher Schnitte nach o zu führenden besondern Schnittes l verschiedene Fälle zu unterscheiden.



1) Ist Q der Integrationsweg r, so kann man den von ω aus nach der negativen Seite von r gezogenen Schnitt l über r hinweg zur positiven Seite fortsetzen. Die Anzahl der positiven Uebergänge von r über l wird dadurch um -1 vermehrt.



2) Sei Q einer der Schnitte $a\, b$ oder l_k; der von ω nach o zu führende Schnitt heisse l' oder l'', jenachdem der Endpunkt o auf der positiven oder der negativen Seite von Q liegt. Da l im gegenwärtigen Falle den Schnitt Q nicht überschreiten darf, ebenso wenig, wie einen der übrigen Schnitte $a\, b$ oder l_k, so müssen l' und l'' so gewählt werden, dass sie zusammen-

genommen einen Ringweg ϱ bilden, der von der negativen auf die positive Seite von Q führt, ohne einen der Schnitte $a\ b\ l_k$ zu überschreiten.

Sind nun $\overset{+}{\lambda}, \overset{-}{\lambda}$ die Werte von λ, je nachdem o auf der positiven oder der negativen Seite von a liegt, so folgt aus (1) für diesen Schnitt Q:

$$(2) \quad \overset{+}{\mathfrak{C}} - \overset{-}{\mathfrak{C}} + \sum_{\mu=1}^{p} \left\{ \alpha_\mu (\overset{+}{\mathfrak{A}}_\mu - \overset{-}{\mathfrak{A}}_\mu) + \beta_\mu (\overset{+}{\mathfrak{B}}_\mu - \overset{-}{\mathfrak{B}}_\mu) \right\} - 2\pi i (\overset{+}{\lambda} - \overset{-}{\lambda}) = 0.$$

a) Nun sind an jedem Schnitte l_k die Periodicitätsmoduln der Functionen $\mathfrak{C}, \mathfrak{A}_\mu, \mathfrak{B}_\mu$ gleich Null; also ergibt sich, dass an jedem Schnitte l_k

$$\overset{-}{\lambda} - \overset{+}{\lambda} = o$$

ist, d. h. dass die Anzahl der positiven Uebergänge von r über l nicht geändert wird, wenn o von der einen auf die andere Seite von l_k verlegt wird.

b) Ist Q der Schnitt r, so haben wir zu setzen:

$$\overset{+}{\mathfrak{C}} - \overset{-}{\mathfrak{C}} = -2\pi i;$$

die Periodicitätsmoduln aller $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind gleich Null; also folgt aus (2):

$$-2\pi i - 2\pi i (\overset{+}{\lambda} - \overset{-}{\lambda}) = o;$$

$$\overset{+}{\lambda} - \overset{-}{\lambda} = -1.$$

Tritt also o von der negativen Seite von r auf die positive über, so vermehrt sich die Anzahl der positiven Uebergänge von r über l um -1, wie wir schon oben sahen.

c) Ist Q der Querschnitt b_μ, so ist:

$$\overset{+}{\mathfrak{A}}_\mu - \overset{-}{\mathfrak{A}}_\mu = 2\pi i;$$

die übrigen Periodicitätsmoduln sind gleich Null, also folgt:

$$o = 2\pi i . \alpha_\mu - 2\pi i (\overset{+}{\lambda} - \overset{-}{\lambda});$$

$$\overset{+}{\lambda} - \overset{-}{\lambda} = \alpha_\mu .$$

Den Ringschnitt ϱ, der, ebenso wie a_μ, von $\overset{-}{b}_\mu$ nach $\overset{+}{b}_\mu$ führt, bezeichnen wir aus diesem Grunde durch a'_μ. Ebenso wie bei a_μ werde die linke Seite von a'_μ als die positive bezeichnet. Diese Bezeichnungsweise stimmt überein mit der oben für die Ränder von l' festgelegten; bei l'' ist sie die entgegengesetzte. Also ist $\overset{+}{\lambda}$ die Anzahl der positiven Uebergänge von r über das Stück l' von a'_μ; für das andere Stück von a'_μ, nämlich l'' ist sie gleich $-\overset{-}{\lambda}$; daher ist

$$\overset{+}{\lambda} - \overset{-}{\lambda} = \alpha_\mu$$

die Anzahl der positiven Uebergänge von r über a'_μ; sie ist also dieselbe, wie für a_μ.

d) Nimmt man für Q den Querschnitt a_μ, so ist:

$$\overset{+}{\mathfrak{B}}_\mu - \overset{-}{\mathfrak{B}}_\mu = -2\pi i;$$

alle übrigen Periodicitätsmoduln sind gleich Null, also folgt:

$$-2\pi i\beta_\mu - 2\pi i(\overset{+}{\lambda} - \overset{-}{\lambda}) = o;$$

$$\overset{-}{\lambda} - \overset{+}{\lambda} = \beta_\mu.$$

In diesem Falle bezeichnen wir den Ringweg ρ, weil er, wie b_μ, von $\overset{-}{a}_\mu$ nach $\overset{+}{a}_\mu$ führt, durch b'_μ. Bei b'_μ werde ebenso wie bei b_μ nicht die linke Seite, sondern die rechte als positive bezeichnet. Diese Bezeichnung stimmt überein mit der für das Stück l'' desselben festgelegten; für das andere Stück l' ist sie die umgekehrte. Also ist jetzt

$$\lambda - \overset{+}{\lambda} = \beta_\mu$$

die Anzahl der positiven Uebergänge von r über b'_μ; diese ist somit dieselbe, wie für den Querschnitt b_μ.

e) An einem Schnitte c sind alle Periodicitätsmoduln gleich Null, also ist dort:

$$\overset{+}{\lambda} - \overset{-}{\lambda} = 0.$$

Der Widerspruch, welcher in der Gleichung (1) scheinbar enthalten war, hat sich also dahin aufgeklärt, dass auch die ganze Zahl λ Periodicitätsmoduln besitzt, nämlich die folgenden:

an	a_μ	b_μ	c_μ	l_k	r
$\overset{+}{\lambda} - \overset{-}{\lambda} =$	$-\beta_\mu$	$+\alpha_\mu$	0	0	-1

Anders ausgedrückt heisst dies folgendes: Die einfach zusammenhängende Fläche T' wird durch den Ringschnitt r in Stücke zerlegt, welche begrenzt sind von Abteilungen der Schnitte a, b, c und r. Innerhalb eines jeden von diesen Stücken der Fläche T hat λ einen unveränderlichen Wert, aber derselbe ändert sich in der vorstehenden Weise von einem Flächenstück zum andern. Ein Widerspruch wäre in der Gleichung (1) wegen der Periodicitätsmoduln der Functionen $\mathfrak{A}_\mu$, $\mathfrak{B}_\mu$ und $\mathfrak{C}$ nur dann vorhanden, wenn λ in allen diesen Teilen von T' denselben Wert hätte.

Ausserdem hat sich noch folgendes ergeben:

Werden ohne Aenderung von r die vorhandenen Querschnitte a b stetig abgeändert oder in der oben angegebenen Weise durch andere, a' b' ersetzt, so bleibt die Anzahl der positiven Uebergänge von r für jeden solchen Schnitt ungeändert.

Damit ist die Bedeutung der Gleichung (1) klargelegt, und wir können nun mittelst dieser Gleichung die bereits nachgewiesenen Eigenschaften der Functionen $\mathfrak{A}_\mu$, $\mathfrak{B}_\mu$ ohne weiteres auf $\mathfrak{C}$ übertragen. Dann ergibt sich der Satz:

Der Riemann'schen Fläche ist eine Classe von Functionen $\mathfrak{C}$ zugeordnet,

die sich als Integrale über in der Fläche T verlaufende Ringwege r in der Form

$$\mathfrak{C}(o) = \int \psi(o'\,|\,o)\,dz'$$

darstellen. Jede solche Function von z wird unendlich nur in den unendlich fernen Punkten der Fläche T und zwar zur $(m-1)$ten Ordnung ohne logarithmische Unstetigkeit; ausserdem wird sie unstetig nur am Integrationswege r und hat dort den constanten Periodicitätsmodul

$$-2\pi i.$$

Aus jeder Function $\mathfrak{C}$ entspringen zwei wie die Fläche T verzweigte Functionen von z, nämlich

$$e^{\mathfrak{C}(o)} \text{ und } \frac{d\,\mathfrak{C}(o)}{dz},$$

von denen die erstere transscendent, die andere eine algebraische ist.

In dieser Classe gibt es $2p$ linear unabhängige Functionen:

$$-\mathfrak{A}_1, -\mathfrak{A}_2, \ldots\ldots -\mathfrak{A}_p;\ \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\ldots\ldots\mathfrak{B}_p;$$

bei denen als Integrationswege die Querschnitte benutzt werden; durch diese lassen sich alle andern nach der Formel:

$$(1)\ \mathfrak{C}(o) + \sum_{\mu=1}^{p}\Big[\alpha_\mu \mathfrak{A}_\mu(o) + \beta_\mu \mathfrak{B}_\mu(o)\Big] + 2\pi i\Big[\frac{\lambda_1+\lambda_2+\ldots\lambda_n}{n} - \lambda\Big] = 0$$

ausdrücken.

Damit ist die Theorie dieser Functionen zum Abschluss gebracht, insofern der genauere Nachweis, wie $\mathfrak{C}$ sich im Unendlichen verhält, aus den Formeln:

$$\frac{1}{\pi i}\sum_{\mu=1}^{p} u'_\mu(\varepsilon)\,\mathfrak{A}_\mu(o) = \psi(\varepsilon\,|\,o) + \text{funct. cont. (§ 10.)}$$

und

$$\mathfrak{B}_\mu(o) = \frac{1}{\pi i}\sum_{\lambda=1}^{p} a_{\lambda\mu}\,\mathfrak{A}_\lambda(o) - 2\,u_\mu(o) \text{ (§ 3. C)}$$

durch Zusammensetzung folgt.

§ 15.

Wir wollen nun noch mit wenigen Worten einen im Vorangehenden unberücksichtigt gelassenen Fall erledigen, den nämlich, wo der Ringweg r die Fläche T in getrennte Stücke zerschneidet. Sei T_1 dasjenige Stück, um welches in positiver Richtung integrirt werden soll. Dann ist nach dem Satze CAUCHY's das um T_1 genommene Integral,

$$\mathfrak{C} = \int d\,R(o'\,|\,o),$$

gleich dem Produkt aus $2\pi i$ in die Summe der Gewichte aller logarithmischen Unstetigkeiten von R in T_1. Wenn zu T_1 n_1 unendlich ferne Punkte von T gehören, so folgt:

$$\mathfrak{C} = n_1 \cdot \frac{2\pi i}{n},$$

falls der Punkt o ausserhalb T_1, und

$$\mathfrak{C} = n_1 \cdot \frac{2\pi i}{n} - 2\pi i,$$

wenn der Punkt o innerhalb T_1, also auf der positiven Seite von r liegt.

An r ist der erstere Wert gleich $\overset{-}{\mathfrak{C}}$, der letztere gleich $\overset{+}{\mathfrak{C}}$, also folgt dort:

$$\overset{+}{\mathfrak{C}} - \overset{-}{\mathfrak{C}} = -2\pi i.$$

Da $\mathfrak{C}$ innerhalb und ausserhalb T_1 constant ist, so sind in der allgemeinen Formel alle α_μ und β_μ Null; aus (1) folgt für beide Fälle:

$$\mathfrak{C}(o) = 2\pi i \cdot \left[\lambda - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}{n}\right],$$

nur dass im ersten Falle $\lambda = \overset{-}{\lambda}$, im zweiten Falle $\lambda = \overset{+}{\lambda}$ und ausserdem $\overset{-}{\lambda} - \overset{+}{\lambda} = 1$ zu setzen ist.

Dass die Zahlen α_μ, β_μ im gegenwärtigen Falle gleich Null sind, ergibt sich auch daraus, dass ein positiver Uebergang von r über a_μ das nämliche ist, wie ein negativer von a_μ über r, also ist $-\alpha_\mu$ die Anzahl der positiven Uebergänge von a_μ über r, das heisst die Anzahl der Fälle, wo a_μ, den Rand r von T_1 überschreitend, in T_1 eintritt, vermindert um die Anzahl der Austrittsstellen. Folgt man aber dem Wege a_μ, indem man an einer bestimmten Stelle innerhalb T_1 beginnt, so ist klar, weil man wieder in den Ausgangspunkt zurückkehren muss, dass die Anzahl der Austrittsstellen aus T_1 der Anzahl der Eintrittsstellen gleich ist, also ist $\alpha_\mu = o$; ebenso folgt: $\beta_\mu = o$, was noch verificirt werden sollte.

Lebenslauf.

Ich, Michael Ludwig Otto Pauls, bin geboren am 8. August 1857 zu Montjoie in der Rheinprovinz, woselbst mein im Jahre 1863 verstorbener Vater Arzt war. Nachdem ich in der Elementarschule und der höhern Bürgerschule meines Heimatsortes den ersten Unterricht erhalten hatte, wurde ich im Oktober 1872 in die Obertertia der Realschule erster Ordnung zu Aachen aufgenommen, welche Anstalt ich im Herbste 1877 mit dem Zeugniss der Reife verliess, um mich zunächst in Bonn während dreier Semester dem Studium der Mathematik zu widmen. Im April 1879 liess ich mich an der Strassburger Universität immatrikuliren und setzte hier während fünf weiterer Semester meine Studien fort.

Collegien hörte ich in Bonn bei den Herren Professoren:

Clausius, Delius, Kekulé, Ketteler, Kortum, Lipschitz, Schaarschmidt, Schönfeld, Troschel, Willmanns;

in Strassburg bei den Herren Professoren:

de Bary, Christoffel, Groth, Kundt, Liebmann, Netto, Reye, Schmidt.

Allen den genannten Herren, insbesondere Herrn Professor Christoffel spreche ich an dieser Stelle für das rege Interesse an dem Fortgange meiner Studien den herzlichsten Dank aus.



